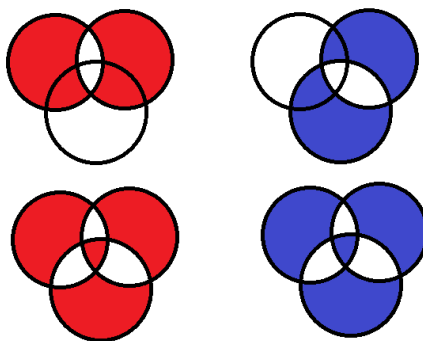


Algebra dla MSEM 1, 2019/2020

ćwiczenia 8. – rozwiązania

29 października 2019

1. Niech $A = \{x \in \mathbb{R}: 0 < x \leq 100\}$ oraz $B = \{x \in \mathbb{R}: x = 2k, k \in \mathbb{Z}\}$. Znajdź $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \Delta B$.
 $A \cup B = (0; 100] \cup \{2k: k \in \mathbb{Z}\}$, $A \cap B = \{2, 4, \dots, 100\}$, $A \setminus B = (0; 100] \setminus \{2, 4, \dots, 100\}$, $B \setminus A = \{2z: z \in \mathbb{Z}, z \leq 0 \vee z > 50\}$, $A \Delta B = \{2z: z \in \mathbb{Z}, z \leq 0 \vee z > 50\} \cup ((0; 100] \setminus \{2, 4, \dots, 100\})$.
2. Udowodnij, że $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$.



Na czerwono kolejno $A \Delta B$ oraz cała lewa strona równania. Na niebiesko kolejno $B \Delta C$ oraz cała prawa strona równania.

3. Niech $A = [-1; 1]$, zaś $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Znajdź obraz i przeciwobraz zbioru A , gdy
 - a) $f(x) = x^4 + 7$,
 $f[A] = \{x^4 + 7: x \in [-1; 1]\} = \{y + 7: y \in [0; 1]\} = [7; 8]$.
 $f^{-1}[A] = \{x: x^4 + 7 \in [-1; 1]\} = \{x: x^4 \in [-8, -6]\} = \emptyset$.
 - b) $f(x) = \sin x\pi \cdot \cos x\pi$,
 $\sin a \cdot \cos a = \frac{1}{2} \sin 2a$, więc
 $f[A] = \{\frac{1}{2} \sin 2x\pi: x \in [-1; 1]\} = \{y/2: y \in [-1; 1]\} = [-1/2; 1/2]$.
 $f^{-1}[A] = \{x: \frac{1}{2} \sin 2x\pi \in [-1; 1]\} = \mathbb{R}$.
 - c) $f(x) = 3^x$.
 $f[A] = \{3^x: x \in [-1; 1]\} = [1/3; 3]$.
 $f^{-1}[A] = \{x: 3^x \in [-1; 1]\} = (-\infty; 0]$.
4. Niech $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$ będą funkcjami. Wykaż, że jeśli $g \circ f$ jest funkcją różnowartościową, to f też jest funkcją różnowartościową.
Niech $f(x_1) = f(x_2)$, wtedy $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$, ale skoro $g \circ f$ jest różnowartościowa, to $x_1 = x_2$, a zatem f jest różnowartościowa.
5. Ile jest funkcji ze zbioru liczb $\{1, 2, \dots, n\}$ na zbiór $\{1, 2, \dots, n\}$, takich, że $f(1) = 1$?
Inaczej mówiąc wszystkie wartości $\{2, \dots, n\}$ musimy przyporządkować argumentom $\{2, \dots, n\}$, zatem żadna wartość nie może się powtarzać, czyli chodzi o ustawienie ich w dowolnej kolejności, a takich ustawień jest $(n-1)!$.

6. Wykaż, że zbiór $G = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: f(x) = x + b, b \in \mathbb{R}\}$ jest grupą przekształceń.

Niech $f, g \in G$, $f = x + b, g = x + c$. Mamy, że $\text{id} = x + 0 \in G$. Zauważmy też, że $f^{-1} = x - b \in G$, rzeczywiście niech $h = x - b$, wtedy $(f \circ h)(x) = (x - b) + b = x$, zatem $\text{id} = f \circ h = h \circ f$. Co więcej, $f \circ g = (x + b) + c = x + (b + c) \in G$.

7. Niech $A_n = [-1/n; 1/n]$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, oraz $B_n = \mathbb{R} \setminus A_n$. Znajdź $\bigcup_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} A_n$ oraz $\bigcup_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} B_n$.

$\bigcup_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} A_n = [-1; 1]$, ponieważ dla każdego $n > 0$, $A_n \subseteq A_1 = [-1; 1]$.

Tymczasem $\bigcup_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} B_n = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Rzeczywiście dla każdego $n > 0$, $0 \notin B_n$. Natomiast dla dowolnej niezerowej liczby rzeczywistej r , jeśli $r < -1$ lub $r > 1$, to $r \in B_1$, jeśli $0 < |r| \leq 1$, to gdy $n > 1/|r|$, czyli np. $n = \lceil 1/|r| \rceil + 1$, to $r \in B_n$.

8. Udowodnij, że dla dowolnego zbioru T oraz A oraz dla dowolnej rodziny indeksowanej A_t , $t \in T$, zachodzi

$$A \setminus \bigcup_{t \in T} A_t = \bigcap_{t \in T} (A \setminus A_t).$$

Niech $x \in A \setminus \bigcup_{t \in T} A_t$, wtedy $x \in A$ oraz $x \notin \bigcup_{t \in T} A_t$, zatem $x \in A$ oraz nie jest prawdą, że istnieje $t \in T$, że $x \in A_t$, czyli $x \in A$ oraz dla każdego t , $x \notin A_t$, zatem dla każdego t , $x \in A \setminus A_t$, a zatem dla każdego $t \in T$, $x \in A \setminus A_t$, zatem $x \in \bigcap_{t \in T} (A \setminus A_t)$. Co dowodzi zawierania lewego zbioru w prawym. Dowód można bez trudu odwrócić udowadniając drugie zawieranie.

9. Ustalmy $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Niech dla dowolnych $x, y \in \mathbb{N}$, $x \equiv_n y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $n|(y - x)$. Wykazać, że $\equiv_n$ jest relacją równoważności oraz opisać jej klasy abstrakcji.

Rzeczywiście jest to relacja zwrotna ($n|0 = x - x$), symetryczna (jeśli $n|x - y$, to $n|y - x$, więc $y \equiv_n x$) oraz przechodnia (jeśli $n|x - y$ oraz $n|y - z$, to $n|x - y + y - z = x - z$, więc $x \equiv_n z$).

Klasy abstrakcji odpowiadają resztom z dzielenia przez n , czyli dla $r \in \{0, \dots, n-1\}$, $[r]_{\equiv_n} = \{kn + r: k \in \mathbb{N}\}$. Jest ich zatem n oraz każda z nich jest przeliczalna.

10. Zbadać elementy minimalne, maksymalne, największe i najmniejsze w porządku liczb naturalnych (bez zera) z podzielnością.

Nie istnieją elementy największe i maksymalne. Rzeczywiście, dla każdego n , $2n$ jest w tym porządku większe od n , zatem n nie jest maksymalny, a tym bardziej największy.

Istnieje za to element najmniejszy (zatem minimalny) i jest to 1. Rzeczywiście dla każdej liczby naturalnej n , $1|n$.

11. Rozstrzygnij, czy zbiór wszystkich okręgów na płaszczyźnie o środkach mających współrzędne wymierne i promieniach $n\sqrt{5}$, $n \in \mathbb{N}$ jest przeliczalny.

Tak, ponieważ mamy bijekcję pomiędzy tym zbiorem, a $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{N}$, gdzie okręgowi odpowiada trójka liczb, gdzie dwie pierwsze współrzędne to współrzędne jego środka, zaś trzecia to liczba n , taka, że promień tego okręgu to $n\sqrt{5}$. Produkt trzech zbiorów przeliczalnych jest przeliczalny, zatem badany zbiór jest również przeliczalny.

12. Udowodnij, że jeśli $|A| = |B|$ oraz $|X| = |Y|$, to $|A \times X| = |B \times Y|$.

Niech $f: A \rightarrow B$ będzie bijekcją oraz niech $g: X \rightarrow Y$ będzie bijekcją. Wtedy bijekcja $h: A \times X \rightarrow B \times Y$ jest zadana wzorem $h(a, x) = \langle f(a), g(x) \rangle$.