

Algebra dla MSEM 1, 2019/2020

ćwiczenia 7. – rozwiązania zadań domowych

25 października 2019

Zadania domowe

- Narysuj diagram Hassego i wskaż elementy minimalne i maksymalne oraz największy i najmniejszy (jeśli istnieją), a także zbiory ograniczeń górnych i dolnych oraz kres górny i dolny zbioru Y (jeśli istnieją) w następujących częściowych porządkach $\leq$ na zbiorze X :
 - $X = \{2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 12, 24\}$, $n \leq m \Leftrightarrow n|m$, $Y = \{4, 6\}$,
 - $X = P(\{1, 2, 3\})$, $A \leq B \Leftrightarrow A \subseteq B$, $Y = P(\{2, 3\})$.
 - $X = \{1, 2, 3\} \times P(\{1, 2\})$ z porządkiem leksykograficznym, gdzie na $\{1, 2, 3\}$ rozpatrujemy $\leq$, a na $P(\{1, 2\})$ zawieranie. Niech $Y = \{1, 2, 3\} \times \{\{1\}\} \cup \{\{3, \{2\}\}\}$.
 - Niech $X = \{0, 1\}^*$ będzie uporządkowany porządkiem leksykograficznym. Znajdź o ile istnieją, kresy górne i dolne następujących zbiorów:
 - $A = \{01^n : n \in \mathbb{N}\}$,
 - $B = \{w : \text{liczba zer i jedynek w } w \text{ jest taka sama}\}$,
 - Rozstrzygnij, czy następujące dwa porządki są izomorficzne.
 - $\langle \mathbb{Z}, \leq \rangle$ oraz $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$, gdzie $k \leq l \Leftrightarrow (kl < 0 \wedge k > l) \vee (kl \geq 0 \wedge |k| \leq |l|)$.
 - $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$ oraz $\langle \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \leq_{leks} \rangle$
 - $\langle \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \leq_{leks} \rangle$ oraz $\langle \mathbb{R}, \leq \rangle$
 - $\langle P_{fin}(\mathbb{N}), \subseteq \rangle$ oraz $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$, gdzie $X \subseteq Y \Leftrightarrow (X = Y \vee (\max(X \triangle Y) \in Y))$.
 - Udowodnij, że istnieje zbiór $A \subseteq \mathbb{R}^2$, taki że żadne 3 punkty do niego należące nie leżą na jednej prostej, ale każdy punkt $x \in \mathbb{R}^2 \setminus A$ należy do pewnej prostej przechodzącej przez dwa różne punkty zbioru A .
1. Niech $f: \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \rightarrow \mathbb{R}$ będzie zadane wzorem $f(x, y) = x + \frac{1}{y}$. Rozstrzygnij, czy f jest różnowartościowa i czy jest „na”. Odpowiedź uzasadnij.
2. Oblicz $f[\{\langle x, y \rangle : x = 2019\}]$ oraz naszkicuj $f^{-1}[\{0\}]$ dla funkcji f z poprzedniego zadania. Odpowiedzi uzasadnij.
3. Jaką moc ma zbiór $X = \{\langle x_n \rangle \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}} : \exists m \in \mathbb{N} \forall n > m (x_n = x_{n+1})\}$? Odpowiedź udowodnij.
4. Jaką moc ma zbiór $\mathcal{B}$ wszystkich prostych na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$? Odpowiedź udowodnij.
5. Zaproponuj zbiór liczb naturalnych, dla których poniższy diagram jest diagramem Hassego porządku podzielności. Wskaż elementy minimalne, maksymalne, największe i najmniejsze – o ile istnieją. Zaproponuj taki podzbiór, który ma kres dolny, ale nie ma kresu górnego.

