

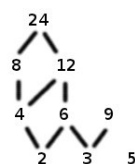
Algebra dla MSEM 1, 2019/2020

ćwiczenia 7. – rozwiązania

25 października 2019

1. Narysuj diagram Hassego i wskaż elementy minimalne i maksymalne oraz największy i najmniejszy (jeśli istnieją), a także zbiory ograniczeń górnych i dolnych oraz kres górny i dolny zbioru Y (jeśli istnieją) w następujących częściowych porządkach $\leq$ na zbiorze X :

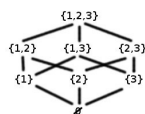
a) $X = \{2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 12, 24\}$, $n \leq m \Leftrightarrow n|m$, $Y = \{4, 6\}$,



Zatem elementy minimalne to $\{2, 3, 5\}$, maksymalne: $\{5, 9, 24\}$, zatem elementy najmniejszy i największy nie istnieją.

Zbiorem ograniczeń dolnych zbioru Y jest: $\{2\}$, zaś ograniczeń górnych: $\{12, 24\}$ Kresem górnym Y jest 12, zaś kresem dolnym jest 2.

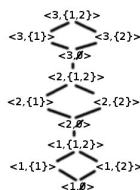
b) $X = P(\{1, 2, 3\})$, $A \leq B \Leftrightarrow A \subseteq B$, $Y = P(\{2, 3\})$.



Zatem elementem minimalnym (jedynym) oraz najmniejszym jest $\emptyset$, jedynym maksymalnym i największym: $\{1, 2, 3\}$.

Zbiorem ograniczeń dolnych zbioru Y jest: $\{\emptyset\}$, zaś ograniczeń górnych: $\{\{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$ Kres górnym Y to wobec tego $\{2, 3\}$, zaś kresem dolnym jest $\emptyset$.

c) $X = \{1, 2, 3\} \times P(\{1, 2\})$ z porządkiem leksykograficznym, gdzie na $\{1, 2, 3\}$ rozpatrujemy $\leq$, a na $P(\{1, 2\})$ zawieranie. Niech $Y = \{1, 2, 3\} \times \{\{1\}\} \cup \{\{3, \{2\}\}\}$.



Zatem elementem minimalnym (jedynym) oraz najmniejszym jest $\langle 1, \emptyset \rangle$, jedynym maksymalnym i największym: $\langle 3, \{1, 2, 3\} \rangle$.

Zbiorem ograniczeń dolnych zbioru Y jest: $\{\langle 1, \emptyset \rangle, \langle 1, \{1\} \rangle\}$, zaś ograniczeń górnych: $\{\langle 3, \{1, 2, 3\} \rangle\}$ Kres górnym Y to wobec tego $\langle 3, \{1, 2, 3\} \rangle$, zaś kresem dolnym jest $\langle 1, \{1\} \rangle$.

2. Niech $X = \{0, 1\}^*$ będzie uporządkowany porządkiem leksykograficznym. Znajdź o ile istnieją, kresy górne i dolne następujących zbiorów:

a) $A = \{01^n : n \in \mathbb{N}\}$,

Zauważmy, że dla każdego $w \in A$, $01 \leq_{lex} w$, zatem 01 jest kresem dolnym tego zbioru.

Każde słowo zaczynające się od 1 jest ograniczeniem górnym tego zbioru. Natomiast każde słowo zaczynające się od zera, nie jest, zatem kresem górnym A jest 1.

- b) $B = \{w: \text{liczba zer i jedynek w } w \text{ jest taka sama}\}$,
 Do każdego słowa v możemy dopisać na końcu brakujące zera lub jedynki tak, żeby otrzymać słowo $w \in B$. Zatem B jest nieograniczony z góry, czyli kres górny nie istnieje. Ponieważ $\varepsilon \in B$, jest jego kresem dolnym.
3. Rozstrzygnij, czy następujące dwa porządki są izomorficzne.
- a) $\langle \mathbb{Z}, \leq \rangle$ oraz $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$, gdzie $k \leq l \Leftrightarrow (kl < 0 \wedge k > l) \vee (kl \geq 0 \wedge |k| \leq |l|)$.
 Jest to następujący porządek: $0 < 1 < 2 < \dots < -1 < -2 < \dots$. Nie są izomorficzne, bo w pierwszym występuje ograniczony ciąg ściśle rosnący, a w drugim nie.
- b) $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$ oraz $\langle \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \leq_{leks} \rangle$
 Nie są izomorficzne, bo w pierwszym występuje ograniczony ciąg ściśle rosnący, a w drugim nie.
- c) $\langle \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \leq_{leks} \rangle$ oraz $\langle \mathbb{R}, \leq \rangle$
 W pierwszym wypadku jeśli $A \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ jest gęsty, to ma moc continuum. W drugim wypadku mamy gęsty przeliczalny podzbiór – mianowicie $\mathbb{Q}$.
- d) $\langle P_{fin}(\mathbb{N}), \subseteq \rangle$ oraz $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$, gdzie $X \subseteq Y \Leftrightarrow (X = Y \vee (\max(X \triangle Y) \in Y))$.
 Tak, jeśli $X \subseteq Y$, to $\min X \leq \min Y$, czyli $X \subseteq \{0, \dots, \max Y\}$ – odcinki początkowe skończone.
4. Udowodnij, że istnieje zbiór $A \subseteq \mathbb{R}^2$, taki że żadne 3 punkty do niego należące nie leżą na jednej prostej, ale każdy punkt $x \in \mathbb{R}^2 \setminus A$ należy do pewnej prostej przechodzącej przez dwa różne punkty zbioru A .
 Niech $\mathcal{A}$ będzie rodziną tych podzbiorów, że żadne 3 punkty do niego należące nie leżą na jednej prostej. $\mathcal{A}$ jest uporządkowana przez relację inkluzji oraz, jeśli L jest łańcuchem w $\mathcal{A}$, to $\bigcup L \in \mathcal{A}$, bo te trzy punkty leżą w pewnym $X \in L$, zarazem $\bigcup L$ jest ograniczeniem górnym L . Co więcej $\mathcal{A}$ jest niepusta. Zatem istnieje w niej element maksymalny A na mocy Lematu Kuratowskiego-Zorna. Jeśli x nie spełnia warunku, że należy do pewnej prostej przechodzącej przez dwa różne punkty zbioru A , to $A \cup \{x\} \in \mathcal{A}$ oraz $A \subsetneq A \cup \{x\}$ – sprzeczność. $\square$