

Algebra dla MSEM 1, 2019/2020

ćwiczenia 7. – rozwiązania zadań domowych

25 października 2019

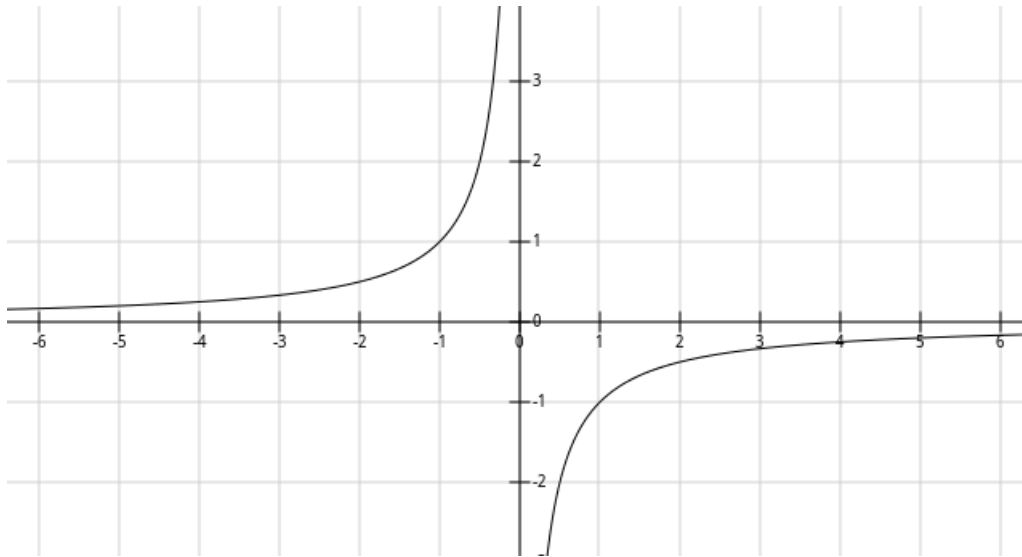
1. Niech $f: \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \rightarrow \mathbb{R}$ będzie zadane wzorem $f(x, y) = x + \frac{1}{y}$. Rozstrzygnij, czy f jest różnowartościowa i czy jest „na”. Odpowiedź uzasadnij.

f nie jest różnowartościowa, bowiem $f(1, -1) = 0 = f(-1, 1)$. Jest natomiast „na”. Niech bowiem $r \in \mathbb{R}$. Jeśli $r \neq 0$, to $r = f(0, \frac{1}{r})$. Natomiast jeśli $r = 0$, to $r = f(1, -1)$.

2. Oblicz $f[\{\langle x, y \rangle : x = 2019\}]$ oraz naszkicuj $f^{-1}[\{0\}]$ dla funkcji f z poprzedniego zadania. Odpowiedzi uzasadnij.

Zauważamy, że $f[\{\langle x, y \rangle : x = 2019\}] = \mathbb{R} \setminus \{2019\}$, bowiem $r = f(2019, \frac{1}{r-2019})$. Ale dla żadnego y , nie zachodzi $2019 = 2019 + \frac{1}{y}$.

Oczywiście $f(x, y) \in \{0\}$ o ile $x + \frac{1}{y} = 0$, czyli $y = -\frac{1}{x}$. Zatem to następujący zbiór:



3. Jaką moc ma zbiór $X = \{\langle x_n \rangle \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}} : \exists m \in \mathbb{N} \forall n > m (x_n = x_{n+1})\}$? Odpowiedź udowodnij.

Wiemy, że $\{0, 1\}^*$ jest przeliczalny, natomiast $f: \{0, 1\}^* \rightarrow X_1$ dopisująca do skończonego ciągu nieskończenie wiele jedynek jest „na”, gdzie X_1 to zbiór wszystkich ciągów zer i jedynek, które od pewnego miejsca są stale równe 1. Zatem X_1 jest co najwyżej przeliczalny, ale nie jest skończony, więc jest przeliczalny. Podobnie przeliczalny jest zbiór X_0 wszystkich ciągów zer i jedynek, które od pewnego miejsca są stale równe 0 jest przeliczalny. Wobec tego również $X = X_0 \cup X_1$ jest przeliczalny. $\square$

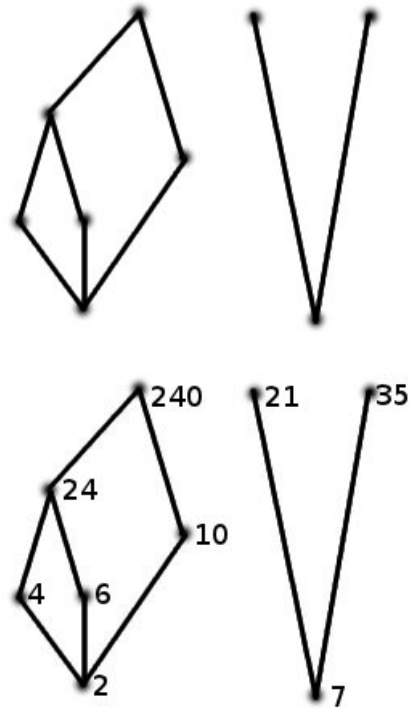
4. Jaką moc ma zbiór $\mathcal{B}$ wszystkich prostych na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$? Odpowiedź udowodnij.

Ma moc continuum. Z jednej strony funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{B}$, przyporządkowująca a prostą $y = a$ jest 1-1, więc $|\mathbb{R}| \leq |\mathcal{B}|$.

Z drugiej strony funkcja $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathcal{B}$, przyporządkowująca trójce (a, b, c) prostą $ax + by + c = 0$ jest przekształceniem „na”, więc $|\mathcal{B}| \leq |\mathbb{R}^3| = |\mathbb{R}|$.

Zatem z Tw. Cantora-Bernsteina. $\square$

5. Zaproponuj zbiór liczb naturalnych, dla których poniższy diagram jest diagramem Hassego porządku podzielności. Wskaż elementy minimalne, maksymalne, największe i najmniejsze – o ile istnieją. Zaproponuj taki podzbiór, który ma kres dolny, ale nie ma kresu górnego.



Nie ma elementów największych i najmniejszych. Minimalne to 2 i 7, zaś maksymalne to 240, 21 i 35. Zbiór $\{21, 35\}$ ma kres dolny, który jest jedynym jego dolnym ograniczeniem, czyli 7. Nie ma zaś kresu górnego, bo nie ma górnych ograniczeń.