

Algebra dla MSEM 1, 2019/2020

ćwiczenia 5. – rozwiązania

18 października 2019

1. Udowodnij, że następujące zbiory są przeliczalne.

a) zbiór wszystkich przedziałów otwartych w $\mathbb{R}$ o obu końcach wymiernych,

$\mathbb{Q}$ jest przeliczalny, ponieważ iloczyn kartezjański dwóch zbiorów przeliczalnych jest przeliczalny, to $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ jest przeliczalny. Ponieważ podzbiór zbioru przeliczalnego jest co najwyżej przeliczalny, to $A = \{(p, q) \in \mathbb{Q}^2 : p < q\}$ jest przeliczalny, a $f: A \rightarrow P(\mathbb{R})$, $f((p, q)) = (p, q)$ jest na badany zbiór, czyli jest to zbiór co najwyżej przeliczalny, a ponieważ jest nieskończony to jest przeliczalny. $\square$

b) $X = \{(x_n) \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}} : \exists m \in \mathbb{N} \forall n > m (x_n = 1)\}$,

Wiemy, że $\{0, 1\}^*$ jest przeliczalny, natomiast $f: \{0, 1\}^* \rightarrow X$ dopisująca do skończonego ciągu nieskończenie wiele jedynek jest „na”. Więc X jest co najwyżej przeliczalny, ale nie jest skończony, więc jest przeliczalny. $\square$

c) $\{f \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}} : \exists k > 0 \forall n \in \mathbb{N} f(n) = f(n+k)\}$,

Niech $F_k = \{f \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}} : \forall n \in \mathbb{N} f(n) = f(n+k)\}$. Oczywiście $\varphi: F_k \rightarrow \mathbb{Q}^k$, $\varphi(f) = f|_{\{0, 1, \dots, k-1\}}$ jest bijekcją, więc $|F_k| = |\mathbb{Q}^k| = |\mathbb{Q}|$, a zatem są to zbiory przeliczalne.

Tymczasem $F = \bigcup_{k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} F_k$ jest przeliczalną sumą przeliczalnych zbiorów więc jest przeliczalny. $\square$

2. Wykaż, że rodzina $\mathcal{F} = \{f \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} : (\forall n f(n+2) - f(n+1) \leq f(n+1) - f(n)) \wedge \exists k \in \mathbb{N} \forall l > k f(l+1) > f(l)\}$ jest przeliczalna.

Zauważmy dwie rzeczy:

- Ciąg $a_n = f(n+1) - f(n)$ jest malejący.
- Od pewnego momentu jest większy od zera.

Zatem a_n jest ciągiem liczb całkowitych ściśle dodatnich, od pewnego miejsca stałym. Niech $\mathcal{A}$ będzie zbiorem wszystkich takich ciągów. Wiemy z poprzedniego podpunktu, że $\mathcal{A}$ jest przeliczalny. Zauważmy również, że $f \in \mathcal{F}$ jest jednoznacznie wyznaczony, przez wartość $f(0)$ oraz ciąg a_n , konkretnie istnieje bijekcja $F: \mathbb{Z} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{F}$, zadana wzorem $F(x, (a_n))(k) = x + \sum_{i=0}^{k-1} a_i$. Zatem $|\mathcal{F}| = |\mathbb{Z}| \times |\mathcal{A}|$ jest równoliczny z produktem dwóch zbiorów przeliczalnych, a zatem jest przeliczalny. $\square$

3. Udowodnij, że każda rodzina przedziałów rozłącznych w $\mathbb{R}$ jest co najwyżej przeliczalna.

Założmy, że rodzina jest niepusta, niech I będzie elementem tej rodziny. Niech f będzie przekształceniem przyporządkowującym liczbie wymiernej q przedział, w którym leży z badanej rodziny, a jeśli nie leży w żadnym przedziale, to przedział I . Zauważmy, że f jest „na”, bo w każdym przedziale liczb rzeczywistych mamy liczbę wymierną. Więc nasza rodzina jest co najwyżej przeliczalna. $\square$

4. Czy dla dowolnej funkcji f i zbioru $B \subseteq R_f$ zachodzi:

a) $|f^{-1}[B]| \leq |B|$?

Nie, np. $f: \{0, 1\} \rightarrow \{0\}$, $f(x) = 0$, $B = \{0\}$, $f^{-1}[B] = \{0, 1\}$.

b) $|B| \leq |f^{-1}[B]|$?

Tak, jeśli $B \neq \emptyset$ $f|_{f^{-1}[B]}: f^{-1}[B] \rightarrow B$ jest na. Jeśli zaś $B = \emptyset$ oczywiste.

5. Udowodnić, że następujące zbiory mają moc continuum:

a) $\mathcal{A} = \{\langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{Q}\},$

Oczywiście $|\mathcal{A}| \leq |\mathbb{R}^2| = |\mathbb{R}|$, bowiem $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^2$.

Aby otrzymać przeciwną nierówność zauważmy, że $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{A}, f(a) = \langle 0, a \rangle \in \mathcal{A}$ jest funkcją 1-1.

Zatem z Tw. Cantora-Bernsteina, mamy że $|\mathcal{A}| = |\mathbb{R}|$. $\square$

b) $\mathcal{C} = \{A \subseteq \mathbb{Z} : \mathbb{N} \subseteq A\},$

Oczywiście $\mathcal{C} \subseteq P(\mathbb{Z})$, więc $|\mathcal{C}| \leq |P(\mathbb{Z})| = |P(\mathbb{N})| = |\mathbb{R}|$.

Z drugiej strony funkcja $f: P(\mathbb{N}) \rightarrow \mathcal{C}$ przypisująca zbiorowi X zbiór $N \cup \{-n - 1 : n \in X\}$ jest 1-1, więc $|\mathcal{C}| \geq |P(\mathbb{N})| = |\mathbb{R}|$. Zatem z Tw. Cantora-Bernsteina. $\square$

6. Znajdź moc zbioru:

a) $\mathcal{A} = \{A \subseteq \mathbb{N} : \forall_{n \in \mathbb{N}} n^2 \in A\},$

Zauważmy, że $L = \{(n+2)^2 + 1 : n \in \mathbb{N}\}$ jest rozłączny ze zbiorem $K = \{n^2 : n \in \mathbb{N}\}$ oraz $|L| = |\mathbb{N}|$, zatem $|P(L)| = \mathfrak{c}$.

Zauważmy także, że funkcja F zadana wzorem $F(A) = A \cup K$ jest zatem funkcją $P(L) \rightarrow \mathcal{A}$ i różnowartościową. Zatem $|\mathcal{A}| \geq |P(L)| = \mathfrak{c}$.

Oczywiście także $\mathcal{A} \subseteq P(\mathbb{N})$, czyli $|\mathcal{A}| \leq \mathfrak{c}$, a zatem z Tw. Cantora-Bernsteina $|\mathcal{A}| = \mathfrak{c}$.

b) wszystkich funkcji niemalejących $\mathbb{N}$ na $\mathbb{N}$,

Oczywiście jest to zbiór ciągów, w których pojawiają się kolejne liczby naturalne $(0, 1, 2, \dots)$ z tym że z dowolnymi krotnościami ≥ 1 . Zatem jest to zbiór równoliczny ze zbiorem wszystkich ciągów liczb naturalnych ≥ 1 (których jest $\mathfrak{c}$), a bijekcję stanowi funkcja przypisująca ciągowi (a_n) takich liczb niemalejący ciąg wszystkich kolejnych liczb naturalnych, w którym n pojawia się z krotnością a_n .