

Algebra dla MSEM 1, 2019/2020

ćwiczenia 3. – rozwiązania

11 października 2019

1. Niech $A_n = \{x \in \mathbb{R} : x \leq n\}$ dla $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Znajdź $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ oraz $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.
 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \mathbb{R}$. Jest tak, ponieważ, jeśli $x \in \mathbb{R}$, to $x \in A_{\lceil \max(x, 1) \rceil}$.
Tymczasem $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = (-\infty, 1]$, bowiem jeśli $x \leq 1$, to dla każdego $n \geq 1$ mamy $x \leq n$, czyli $x \in A_n$.
Natomiast $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq A_1 = (-\infty, 1]$.
2. Niech $A_n = \{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{n} \leq x \leq n\}$ dla $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Znajdź $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ oraz $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.
 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = (0, +\infty)$, bowiem jeśli $x \in A_n$, to $x \geq \frac{1}{n} > 0$, a z drugiej strony, jeśli $0 < x < 1$, to niech $n = \lceil \frac{1}{x} \rceil$.
Wtedy $\frac{1}{n} \leq x < 1$, więc $x \in A_n$, a gdy $1 \leq x$, to $x \in A_{\lceil x \rceil}$.
Natomiast $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{1\}$. Jest tak, bo dla każdego n , $1 \in A_n$, ale $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq A_1 = \{1\}$.
3. Niech $A_n = (-3 + (-1)^n, 0)$ dla $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Znajdź $\bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n \geq m} A_n$ oraz $\bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n \geq m} A_n$.
Wyliczmy najpierw $B_m = \bigcup_{n \geq m} A_n = (-4, 0)$ (jest tak, bo dla $n = 2m + 1$, mamy $n \geq m$ oraz $A_n = (-4, 0)$ a ponadto dla każdego n $A_n \subseteq (-4, 0)$). Zatem $\bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n \geq m} A_n = \bigcap_{m=1}^{\infty} B_m = (-4, 0)$.
W drugim wypadku wyliczamy $C_m = \bigcap_{n \geq m} A_n = (-2, 0)$, bowiem dla każdego n , $(-2, 0) \subseteq A_n$ oraz dla każdego m , $n = 2m \geq m$ i $A_n = (-2, 0)$. Zatem $\bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n \geq m} A_n = \bigcup_{m=1}^{\infty} C_m = (-2, 0)$.
4. Niech $A_{k,x} = \{y \in \mathbb{R} : |x - y| < |y - k|\}$ dla $k \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{R}$. Znajdź $\bigcap_{k \in \mathbb{Z}} \bigcup_{x \in \mathbb{R}} A_{k,x}$.
Zbiór $A_{k,x}$ to zbiór liczb, które są bliżej x , niż k . Znów najpierw rozważmy $B_k = \bigcup_{x \in \mathbb{R}} A_{k,x}$. Widzimy, że $B_k = \mathbb{R} \setminus \{k\}$, bowiem jeśli $y \neq k$, to $y \in A_{k,y}$ oraz dla każdego x , $k \notin A_{k,x}$. A zatem $\bigcap_{k \in \mathbb{Z}} \bigcup_{x \in \mathbb{R}} A_{k,x} = \bigcap_{k \in \mathbb{Z}} B_k = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.
5. Niech $A_n = \{x \in \mathbb{R} : n^2 < x < 2n^2\}$ dla $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Znajdź $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ oraz $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.
Zauważmy, że $A_1 = (1, 2)$, $A_2 = (4, 8)$, $A_3 = (9, 18)$ oraz dla $n > 3$ mamy $n^2 < 2(n-1)^2$, bo $n^2 - 2n^2 + 4n - 2 = -n^2 + 4n - 2$ jest funkcją mniejszą od zera dla $n \geq 4$. A zatem:
 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = (1, 2) \cup (2, 8) \cup (9, +\infty)$, gdzie zawieranie $\subseteq$ jest oczywiste. Jeśli $x \in (1, 2)$, to $x \in A_1$, jeśli $x \in (4, 8)$, to $x \in A_2$, zaś jeśli $x > 9$, to niech $n = \lceil \sqrt{x} \rceil$ i z przedstawionych rozważań wynika, że $x \in A_n$.
Natomiast $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq A_1 \cap A_2 = \emptyset$.
6. Niech

$$A_{n,m} = \{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : f(n) = m\},$$
 $n, m \in \mathbb{N}$. Znajdź: $\bigcup_n \bigcap_m A_{n,m}$, $\bigcup_m \bigcap_n A_{n,m}$, $\bigcap_n \bigcup_m A_{n,m}$ oraz $\bigcap_m \bigcup_n A_{n,m}$.
Niech $B_n = \bigcap_m A_{n,m}$. Zauważmy, że $B_n = \emptyset$. Załóżmy bowiem przeciwnie, że $f \in B_n$. Wtedy dla każdego m , mamy $f(n) = m$, w szczególności $1 = f(n) = 0$ sprzeczność. Zatem $\bigcup_n \bigcap_m A_{n,m} = \bigcup_n B_n = \emptyset$.
Niech $C_m = \bigcap_n A_{n,m}$ oraz niech $f_m(x) = m$. Zauważmy, że $C_m = \{f_m\}$, bowiem $f \in C_m$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego n mamy $f(n) = m$, a jedyną taką funkcją jest funkcja stała równa m , czyli f_m . A zatem $\bigcup_m \bigcap_n A_{n,m} = \bigcup_m C_m = \{f_m : m \in \mathbb{N}\}$ jest zbiorem wszystkich funkcji stałych.
Niech $D_n = \bigcup_m A_{n,m}$. Zauważmy, że $D_n = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, bowiem każda $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ma tę własność, że należy do $A_{n,f(n)}$. A zatem $\bigcap_n \bigcup_m A_{n,m} = \bigcap_n D_n = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.
Niech $E_m = \bigcup_n A_{n,m}$. Zauważmy, że $E_m = \{f : \exists x f(x) = m\}$ to zbiór tych funkcji, które w pewnym punkcie przyjmują wartość m . Rzeczywiście jeśli f jest funkcją, taką, że $f(x) = m$, to $f \in A_{x,m} \subseteq E_m$. Jeśli zaś $f \in E_m$, to istnieje takie n , że $f \in A_{n,m}$, czyli $f(n) = m$. A zatem $\bigcap_m \bigcup_n A_{n,m} = \bigcap_m E_m = \{f : \forall m \exists x f(x) = m\} = \mathbb{N}$ jest zbiorem funkcji „na” $\mathbb{N}$.
7. Udowodnij, że funkcja jest różnowartościowa i znajdź przekształcenie odwrotne:

a) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = \langle x + y, x - y \rangle$,

Rzeczywiście, jeśli $f(x, y) = (z, w) = f(x', y')$, to $x + y = z, x' + y' = z, x - y = w, x' - y' = w$. Zatem $x = \frac{z+w}{2} = x'$ oraz $y = \frac{z-w}{2} = y'$. Zatem $f'(w, z) = \left\langle \frac{z+w}{2}, \frac{z-w}{2} \right\rangle$ i $f': \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

b) $F: \mathcal{P}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{R}))$, $F(A) = \mathcal{P}(A)$.

Rzeczywiście, jeśli $F(A) = \mathcal{A} = F(B)$, to $\mathcal{P}(A) = \mathcal{A} = \mathcal{P}(B)$, zatem $A = \bigcup \mathcal{A} = B$, zatem $F^{-1}(\mathcal{A}) = \bigcup \mathcal{A}$, ale uwaga, F nie jest „na”, więc $F^{-1}: \{\mathcal{A} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{R})) : \exists A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \mathcal{A} = \mathcal{P}(A)\} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$.