

Algebra dla MSEM 1, 2019/2020

ćwiczenia 3. – rozwiązania zadań domowych

11 października 2019

1. Sprawdź, czy prawdą jest, dla dowolnych zbiorów A, B, C , zachodzi: $A \setminus (C \setminus B) = (A \setminus C) \cup (A \cap B)$. Jeśli tak, udowodnij, jeśli nie – podaj kontrprzykład.

Tak. Metoda dowodzenia biorąc element (od razu obie inkluzje): $x \in A \setminus (C \setminus B) \leftrightarrow x \in A \wedge x \notin C \setminus B \leftrightarrow x \in A \wedge \neg(x \in C \wedge x \notin B) \leftrightarrow x \in A \wedge (x \notin C \vee x \in B) \leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin C) \vee (x \in A \wedge x \in B) \leftrightarrow x \in A \setminus C \vee x \in A \cap B \leftrightarrow x \in (A \setminus C) \cup (A \cap B)$. $\square$

2. Wypisz wszystkie elementy i podzbiory zbioru:

$$\{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset\} \cup \{\{\emptyset\}, \emptyset\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \cap \{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}.$$

Obliczamy: $\{\emptyset\} \cup \{\{\emptyset\}, \emptyset\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ oraz $\{\{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \cap \{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}\} = \emptyset$. A zatem mamy takie elementy:

- (a) $\emptyset$,
- (b) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$,
- (c) $\{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$.

i podzbiory:

- (a) $\emptyset$,
- (b) $\{\emptyset\}$,
- (c) $\{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$,
- (d) $\{\{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}$,
- (e) $\{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$,
- (f) $\{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}$,
- (g) $\{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}$,
- (h) $\{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}$.

3. Udowodnij, że relacja $F \subseteq (\mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N})) \times \mathcal{P}(\mathbb{N})$, taka że

$$\langle \langle A, B \rangle C \rangle \in F \leftrightarrow (\forall x (x \in C \leftrightarrow x \in A \vee x \in B)),$$

jest funkcją $(\mathcal{P}(\mathbb{N}))^2 \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Zauważmy, że warunek po prawej stronie po prostu znaczy, że $C = A \cup B$. Czyli $\langle A, B \rangle F C$ wtedy i tylko wtedy, gdy $C = A \cup B$. Zatem niech $\langle A, B \rangle F C$ oraz $\langle A, B \rangle F D$, to $C = A \cup B = D$. Ponadto dla każdych $A, B \subseteq \mathbb{N}$, mamy $\langle A, B \rangle F A \cup B$, co kończy dowód, że F jest funkcją.

4. Następnie sprawdź, czy F jest różnowartościowa i czy jest „na”. Jeśli nie jest różnowartościowa, podaj przykład dwóch argumentów, które przyjmują te same wartości. Jeśli nie jest „na” znajdź jej przeciwdziedzinę.

F nie jest różnowartościowa, bo $F(\{0, 1\}, \{0\}) = \{0, 1\} = F(\{0, 1\}, \{1\})$. Natomiast jest „na”, bowiem dla dowolnego zbioru $C \subseteq \mathbb{N}$, mamy $F(C, C) = C$.

5. Niech $A_x = \{y \in \mathbb{R} : y > \sin x\}$. Znajdź $\bigcup_{z \in \mathbb{R}} \bigcap_{x \geq z} A_x$ oraz $\bigcap_{z \in \mathbb{R}} \bigcup_{x \geq z} A_x$.

Niech $B_z = \bigcap_{x \geq z} A_x$. Zauważmy, że $B_z = (1, +\infty)$. Niech bowiem $a = \lceil \frac{z}{2\pi} \rceil \cdot 2\pi + \frac{\pi}{2}$. Wtedy $a \geq z$ oraz $(1, +\infty) = A_a \supseteq B_z$. Natomiast jeśli $y > 1$, to $y > \sin x$ dla każdego x (w szczególności dla każdego $x > z$), a więc dla każdego x , $y \in A_x$. A zatem $\bigcup_{z \in \mathbb{R}} \bigcap_{x \geq z} A_x = \bigcup_{z \in \mathbb{R}} B_z = (1, +\infty)$.

Niech $C_z = \bigcup_{x \geq z} A_x$. Zauważmy, że $C_z = (-1, +\infty)$. Niech bowiem $a = \lceil \frac{z}{2\pi} \rceil \cdot 2\pi + \frac{3\pi}{2}$. Wtedy $a \geq z$ oraz $(-1, +\infty) = A_a \subseteq C_z$. Natomiast jeśli $y \in C_z$, to $y \in A_x$ dla pewnego x , czyli $y > \sin x \geq -1$, co daje drugie zawieranie. A zatem $\bigcap_{z \in \mathbb{R}} \bigcup_{x \geq z} A_x = \bigcap_{z \in \mathbb{R}} C_z = (-1, +\infty)$.