

Algebra dla MSEM 1, 2019/2020

ćwiczenia 1.

4 października 2019

1. Które z poniższych zdań są tautologiami?

- a) $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$,
- b) $p \rightarrow (\neg p \vee q)$.

2. Rozstrzygnij, czy prawdziwe są następujące zdania:

- a) $\forall_{n \in \mathbb{N}} \exists_{m \in \mathbb{N}} n = m + 1$
- b) $\forall_{n \in \mathbb{N}} \exists_{m \in \mathbb{N}} m = n + 1$
- c) $\forall_{n \in \mathbb{N}} (\exists_{m \in \mathbb{N}} n = m + 1 \leftrightarrow n > 0)$
- d) $(\forall_{n \in \mathbb{N}} (\exists_{m \in \mathbb{N}} n = m + 1) \rightarrow 1 < 0)$
- e) $\forall_{n \in \mathbb{N}} (6|n \leftrightarrow 2|n \wedge 3|n)$
- f) $\forall_{n \in \mathbb{N}} (6|n \rightarrow 2|n \vee 3|n)$
- g) $\exists_X \neg \exists_y y \in X$
- h) $\{z \in \mathbb{Z} : z \geq 0\} = \mathbb{N}$
- i) $\exists_x x \in \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 = 0\}$
- j) $\forall_X \emptyset \subseteq X$
- k) $\forall_A (A \subseteq \mathbb{R} \wedge \exists_{n \in \mathbb{N}} n \in A) \rightarrow \mathbb{N} \subseteq A$

3. Udowodnij, że:

- a) kwadrat liczby naturalnej podzielnej przez 3 dzieli się przez 9, korzystając z metody wprost,
- b) jeśli x jest liczbą wymierną, to $x^2 \neq 5$, korzystając z metody nie wprost.

4. Naskicuj na układzie współrzędnych zbiory $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ oraz $A \triangle B$, jeśli:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}, B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 1)^2 + (y - 1)^2 < 1\}$$

5. Wskaż wszystkie elementy i podzbiory każdego z następujących zbiorów:

- a) $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$,
- b) $\{\mathbb{N}, \{\mathbb{N}\}\}$,
- c) $\{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \setminus \{\emptyset\}, \{\emptyset\} \cap \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$.

6. Udowodnij, że dla dowolnych zbiorów A, B, C :

- a) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$
- b) $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$

7. Czy prawdą jest, że dla dowolnych zbiorów A, B zachodzi równość $(A \setminus B) \cup B = A$?

8. Sprawdź, czy prawdą jest, dla dowolnych zbiorów A, B, C , zachodzi równoważność: $(B \triangle C) \cap A \subseteq B$, wtedy i tylko wtedy, gdy $B \cap C \cap A \supseteq C \cap A$. Jeśli tak, udowodnij, jeśli nie – podaj kontrprzykład.