

Algebra dla MSEM 1, 2019/2020

ćwiczenia 1. – rozwiązania

4 października 2019

1. Które z poniższych zdań są tautologiami?

- a) $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$,
Tak.

p	q	$p \rightarrow q$	$\neg q \rightarrow \neg p$	$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

- b) $p \rightarrow (\neg p \vee q)$,
Nie, dla $p = 1$ i $q = 0$ dostajemy sprzeczność.

2. Rozstrzygnij, czy prawdziwe są następujące zdania:

- a) $\forall_{n \in \mathbb{N}} \exists_{m \in \mathbb{N}} n = m + 1$
Dla każdej liczby naturalnej n istnieje liczba naturalna m , taka że n jest o 1 większa od m . Nieprawda, dla $n = 0$ nie istnieje taka liczba.
- b) $\forall_{n \in \mathbb{N}} \exists_{m \in \mathbb{N}} m = n + 1$
Dla każdej liczby naturalnej istnieje liczba naturalna o jeden od niej większa. Prawda.
- c) $\forall_{n \in \mathbb{N}} (\exists_{m \in \mathbb{N}} n = m + 1 \leftrightarrow n > 0)$
Dla każdej liczby naturalnej n , jeśli istnieje liczba naturalna m , taka że n jest o jeden większa od m , to n jest większa od zera. Prawda, $n = m + 1 \geq 0 + 1 = 1$, więc $n > 0$.
- d) $(\forall_{n \in \mathbb{N}} (\exists_{m \in \mathbb{N}} n = m + 1) \rightarrow 1 < 0)$
Jeśli dla każdej liczby naturalnej n istnieje liczba naturalna m , taka że n jest o 1 większa od m , to 1 jest mniejsze od zera. Prawda. Wiemy, że poprzednik tej implikacji jest fałszywy, więc implikacja jest prawdziwa niezależnie od absurdalności następnika. Z fałszu wynika wszystko.
- e) $\forall_{n \in \mathbb{N}} (6|n \leftrightarrow 2|n \wedge 3|n)$
Dla każdej liczby naturalnej, jest ona podzielna przez 6 wtedy i tylko wtedy gdy jest podzielna przez 2 i jest podzielna przez 3. Prawda.
- f) $\forall_{n \in \mathbb{N}} (6|n \rightarrow 2|n \vee 3|n)$
Dla każdej liczby naturalnej, jeśli jest ona podzielna przez 6, to jest podzielna przez 2 lub jest podzielna przez 3. Prawda. Nawet przez 2 i przez 3.
- g) $\exists_X \neg \exists_y y \in X$
Istnieje zbiór X , taki że nie istnieje element y , który do niego należy. Prawda – X to zbiór pusty, $X = \emptyset$. A całe zdanie to tak zwany aksjomat zbioru pustego.
- h) $\{z \in \mathbb{Z} : z \geq 0\} = \mathbb{N}$
Zbiór liczb całkowitych większych równych zero to zbiór liczb naturalnych. Prawda.
- i) $\exists_x x \in \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 = 0\}$
Istnieje liczba x należąca do zbioru wszystkich liczb rzeczywistych spełniających równanie $x^2 + 1 = 0$. Nieprawda, taki zbiór jest pusty, bo żadna liczba rzeczywista nie spełnia tego równania.

j) $\forall_X \emptyset \subseteq X$

Dla każdego zbioru, zbiór pusty jest jego podzbiorem. Prawda.

k) $\forall_A (A \subseteq \mathbb{R} \wedge \exists_{n \in \mathbb{N}} n \in A) \rightarrow \mathbb{N} \subseteq A$

Dla każdego zbioru A , jeśli A jest podzbiorem zbioru liczb rzeczywistych oraz istnieje liczba naturalna należąca do zbioru A , to A jest zbiorem wszystkich liczb naturalnych. Nieprawda, kontrprzykład $A = [0, 1]$, istnieje liczba naturalna w tym zbiorze, np. 0. Ale $A \neq \mathbb{N}$.

3. Udowodnij, że:

a) kwadrat liczby naturalnej podzielnej przez 3 dzieli się przez 9, korzystając z metody wprost,

Niech n będzie taką liczbą podzielną przez 3, czyli $n = 3k$ dla pewnej liczby naturalnej k . W takim razie $n^2 = (3k)^2 = 9k^2$ dzieli się przez 9.

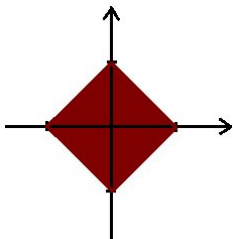
b) jeśli x jest liczbą wymierną, to $x^2 \neq 5$, korzystając z metody nie wprost.

Założmy przeciwnie, że x jest liczbą wymierną, czyli $x = p/q$, $q \neq 0$, $p, q \in \mathbb{Z}$ oraz $x^2 = 5$. Założmy ponadto bez straty ogólności, że p/q jest ułamkiem skróconym, czyli, że p i q nie mają wspólnych dzielników > 1 . W takim razie $(p/q)^2 = 5$, zatem $p^2/q^2 = 5$, czyli $p^2 = 5q^2$. W takim razie p^2 dzieli się przez 5. W takim razie w rozkładzie liczby p^2 na czynniki pierwsze występuje liczba 5, ale skoro jest to kwadrat pewnej liczby całkowitej, to 5 występuje w tym rozkładzie w pewnej parzystej > 0 potęgze. Zatem $5|p$, a więc 5 nie dzieli q , zatem nie dzieli q^2 , co daje sprzeczność.

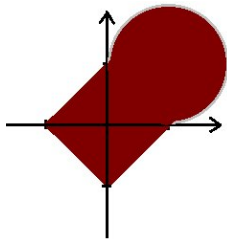
4. Naskicuj na układzie współrzędnych zbiory $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ oraz $A \Delta B$, jeśli:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}, B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + (y-1)^2 < 1\}$$

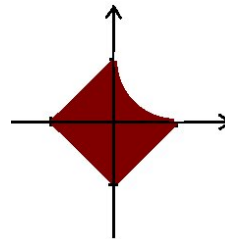
A:



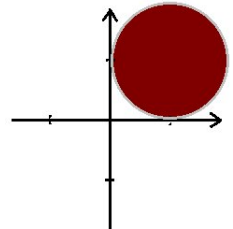
$A \cup B$:



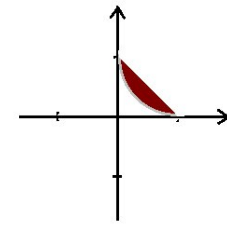
$A \setminus B$:



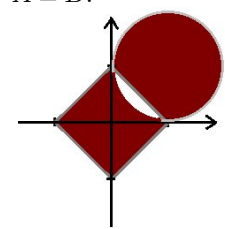
B:



$A \cap B$:



$A \Delta B$:



5. Wskaż wszystkie elementy i podzbiory każdego z następujących zbiorów:

a) $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$,

elementy: $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$,

podzbiory: $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

b) $\{\mathbb{N}, \{\mathbb{N}\}\}$,

elementy: $\mathbb{N}, \{\mathbb{N}\}$, podzbiory: $\emptyset, \{\mathbb{N}\}, \{\{\mathbb{N}\}\}, \{\mathbb{N}, \{\mathbb{N}\}\}$,

c) $\{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \setminus \{\emptyset\}, \{\emptyset\} \cap \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$.

obliczamy, że $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \setminus \{\emptyset\} = \{\{\emptyset\}\}$ oraz $\{\emptyset\} \cap \{\emptyset, \{\emptyset\}\} = \{\emptyset\}$. Zatem:

elementy: $\emptyset, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset\}$,

podzbiory: $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\{\emptyset\}\}\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset\}\}$.

6. Udowodnij, że dla dowolnych zbiorów A, B, C :

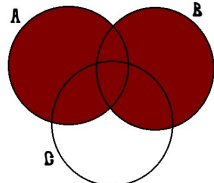
a) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$

Trzema metodami:

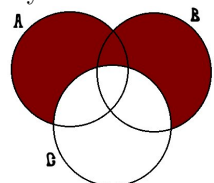
i. metoda diagramów Venna:

Rozważamy lewą stronę:

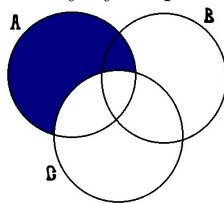
$A \cup B$:



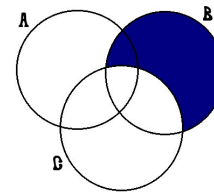
czyli lewa strona to:



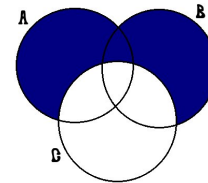
Patrzymy na prawą: $A \setminus C$:



$B \setminus C$:



czyli prawa strona to:



Zgadza się. $\square$

- ii. metoda rodziny niezależnej: Niech $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 5, 6\}$, $C = \{3, 4, 6, 7\}$. Jest to rodzina niezależna, co łatwo, choć żmudnie, można sprawdzić. Teraz obliczamy lewą stronę: $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $(A \cup B) \setminus C = \{1, 2, 5\}$ i prawą: $A \setminus C = \{1, 2\}$, $B \setminus C = \{2, 5\}$, $(A \setminus C) \cup (B \setminus C) = \{1, 2, 5\}$, zgadza się. $\square$

- iii. metoda przez dowiedzenie zawierania w obie strony (biorąc element):

Dowodzimy, że: $(A \cup B) \setminus C \subseteq (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$. Niech $x \in (A \cup B) \setminus C$, wtedy $x \in A \cup B$ oraz $x \notin C$, a zatem $x \in A$ lub $x \in B$, ale $x \notin C$, czyli $(x \in A \wedge x \notin C) \vee (x \in B \wedge x \notin C)$, czyli $x \in A \setminus C$ lub $x \in B \setminus C$, zatem $x \in (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.

Dowodzimy, że: $(A \setminus C) \cup (B \setminus C) \subseteq (A \cup B) \setminus C$: Niech teraz $x \in (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$, zatem $x \in A \setminus C$ lub $x \in B \setminus C$, a zatem $x \in A$ lub $x \in B$, ale w obu przypadkach pod warunkiem, że $x \notin C$. Zatem $x \in A \cup B$, ale $x \notin C$, zatem $x \in (A \cup B) \setminus C$. $\square$

- b) $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$

Zastosujemy metodę przez dowiedzenie zawierania w obie strony:

$A \cap (B \triangle C) \subseteq (A \cap B) \triangle (A \cap C)$: Załóżmy, że $x \in A \cap (B \triangle C)$. Zatem $x \in A$ oraz $x \in B$ lub $x \in C$, ale nie w obu równocześnie. A zatem mamy dwa przypadki: $x \in A \cap B$ lub $x \in A \cap C$, ale wiemy, że nie mogą zachodzić równocześnie. A zatem $x \in (A \cap B) \triangle (A \cap C)$.

$(A \cap B) \triangle (A \cap C) \subseteq A \cap (B \triangle C)$: Niech $x \in (A \cap B) \triangle (A \cap C)$ zatem na pewno $x \in A$ oraz $x \in B$ lub $x \in C$, ale nie jest tak, że $x \in A \cap B \cap C$. A zatem $x \in A$ oraz $x \in B \cup C$, ale nie $x \in B \cap C$, czyli $x \in A \cap (B \triangle C)$. $\square$

7. Czy prawdą jest, że dla dowolnych zbiorów A, B zachodzi równość $(A \setminus B) \cup B = A$?

Nie. Na przykład $A = \emptyset$, $B = \{0\}$. Wtedy $A \setminus B = \emptyset$, $(A \setminus B) \cup B = \{0\} \neq \emptyset = A$.

8. Sprawdź, czy prawdą jest, dla dowolnych zbiorów A, B, C , zachodzi równoważność: $(B \triangle C) \cap A \subseteq B$, wtedy i tylko wtedy, gdy $B \cap C \cap A \supseteq C \cap A$. Jeśli tak, udowodnij, jeśli nie – podaj kontrprzykład.

Jest prawdą. Oto dowód:

$\Leftarrow$: Załóżmy, że $(B \triangle C) \cap A \subseteq B$ oraz $x \in C \cap A$. Załóżmy nie wprost, że $x \notin B$. Zatem $x \in A$ oraz $x \in C \setminus B$, zatem $x \in B \triangle C$ oraz $x \in A$, zatem $x \in (B \triangle C) \cap A$, zatem z założenia $x \in B$ – sprzeczność.

$\Rightarrow$: Załóżmy, że $C \cap A \subseteq A \cap B \cap C$ oraz niech $x \in (B \triangle C) \cap A$. Zatem $x \in B \triangle C \wedge x \in A \rightarrow (x \in B \setminus C \vee x \in C \setminus B) \wedge x \in A \rightarrow ((x \in B \wedge x \notin C) \vee (x \in C \wedge x \notin B)) \wedge x \in A \rightarrow (x \in A \wedge x \in B \wedge x \notin C) \vee (x \in A \wedge x \in C \wedge x \notin B) \rightarrow (x \in A \wedge x \in B \wedge x \notin C) \vee (x \in (A \cap C) \setminus B)$. Ale z założenia $C \cap A \subseteq A \cap B \cap C$, więc $(x \in A \wedge x \in B \wedge x \notin C) \vee (x \in (A \cap C) \setminus B) = \emptyset$, co eliminuje drugą opcję, więc $x \in A \wedge x \in B \wedge x \notin C$, w szczególności $x \in B$. $\square$