

Geometria z algebrą liniową II, 2018/2019

ćwiczenia 28.

14 czerwca 2019

- Niech $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ będzie endomorfizmem zadany wzorem
$$\varphi((x_1, x_2, x_3)) = (-2x_1 + 2x_2 - x_3, x_2, x_1 - 2x_2)$$
oraz niech dla $s \in \mathbb{R}$,
$$A_s = \begin{bmatrix} -1 & 2 & s \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$
będzie macierzą o wyrazach rzeczywistych.
 - Dla jakich $s \in \mathbb{R}$ istnieje taka baza $\mathcal{B}$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$, że $M(\varphi)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = A_s$.
 - Znaleźć bazę Jordana endomorfizmu φ .
 - Podać przykład macierzy B takiej, że $B^9 = A_0$ i obliczyć A_0^n dla każdej liczby naturalnej n .
- Rozważmy przestrzeń afiniczną $\mathbb{R}^3$ ze standardowym iloczynem skalarnym. Niech $K = (1, 1, 1) + \text{lin}((2, 0, 1))$ oraz $L = (1, 2, 1) + \text{lin}((1, 0, -2))$.
 - Znaleźć wzór na takie przekształcenie afiniczne $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, że $f(p) = p$ dla każdego $p \in L$ oraz
$$f((1, 1, 1) + t(2, 0, 1)) = (1, 2, 1) + t(1, 0, -2),$$
dla $t \in \mathbb{R}$.
 - Znaleźć odległość $\rho(K, L)$ między prostymi K i L .
 - Ile jest izometrii $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, że
$$f((1, 1, 1) + t(2, 0, 1)) = (1, 2, 1) + t(1, 0, -2),$$
dla $t \in \mathbb{R}$ oraz $f[L] = K$.
- Rozważmy dla każdego $a \in \mathbb{R}$ formę kwadratową $q_a: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ zadaną wzorem
$$q(x, y, z) = ax^2 + 2yz.$$
Niech $h_a: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ oznacza taką symetryczną formę dwuliniową, że $q_a(v) = h_a(v, v)$ dla każdego $v \in \mathbb{R}^3$, oraz niech
$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y + z = 0\}$$
i niech $X_a \subseteq \mathbb{R}^3$ dla $a \in \mathbb{R}$ będzie hiperpowierzchnią opisaną równaniem
$$ax^2 + 2yz + 2x + 1 = 0.$$
 - W zależności od $a \in \mathbb{R}$ wyznaczyć rząd i sygnaturę formy kwadratowej q_a .
 - Dla jakich $a \in \mathbb{R}$, w przestrzeni dwuliniowej $(\mathbb{R}^3, h_a)$ zachodzi $\mathbb{R}^3 = W \oplus W^\perp$.
 - W zależności od $a \in \mathbb{R}$ podać typ afiniczny hiperpowierzchni X_a (nazwę i naszkicować).
 - Podać typ afiniczny krzywej $X_1 \cap W$.
- Niech (V, h) będzie nieosobliwą przestrzenią dwuliniową.
 - Założmy, że $\dim V \geq 4$ oraz $v \in V$ jest niezerowym wektorem izotropowym. Pokazać, że istnieją podprzestrzenie liniowe W_1 i W_2 , $W_1 \neq W_2$ wymiaru 3 przestrzeni V takie, że przestrzenie $(W_1, h|_{W_1 \times W_1})$ oraz $(W_2, h|_{W_2 \times W_2})$ są nieosobliwe oraz $v \in W_1 \cap W_2$.
 - Założmy, że $\dim V \geq 3$ oraz $v \in V$ jest niezerowym wektorem izotropowym. Pokazać, że istnieją podprzestrzenie liniowe W_1 i W_2 , $W_1 \neq W_2$ wymiaru 2 przestrzeni V takie, że przestrzenie $(W_1, h|_{W_1 \times W_1})$ oraz $(W_2, h|_{W_2 \times W_2})$ są nieosobliwe oraz $\text{lin}(v) = W_1 \cap W_2$.
- Odpowiedz i uzasadnij swoje odpowiedzi.
 - Niech $V = W_1 \oplus W_2$, gdzie V jest przestrzenią wymiaru skończonego nad $\mathbb{R}$ oraz W_1, W_2 są jej właściwymi podprzestrzeniami. Czy -1 może być wartością własną endomorfizmu $\varphi: V \rightarrow V$ będącego rzutem na W_1 wzdłuż W_2 ?
 - Niech V będzie przestrzenią wymiaru 3 nad $\mathbb{C}$. Czy może istnieć endomorfizm $\varphi: V \rightarrow V$, że endomorfizmy $\varphi, \varphi^2, \dots, \varphi^9$ tworzą bazę przestrzeni $\text{End}(V)$?
 - Niech będzie przestrzenią afiniczną wymiaru 6 i niech M_1, M_2 będą podprzestrzeniami afinicznymi H wymiaru 4. Czy może mieć miejsce równość $\dim M_1 \cap M_2 = 1$.
 - Niech $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ będzie afiniczną przestrzenią euklidesową, oraz $f: H \rightarrow H$ niech zachowuje odległość.
 - Niech $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ będzie afiniczną przestrzenią euklidesową wymiaru 5 i niech M będzie taką podprzestrzenią afiniczną H , że symetria prostopadła względem M nie zmienia orientacji H . Jaki wymiar może mieć M ?
 - Rozważmy takie przekształcenie afiniczne $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, że $f((0, 0, \dots, 0)) = (0, 0, \dots, 0)$. Czy f jest przekształceniem liniowym $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$?
 - Niech (V, h) będzie przestrzenią dwuliniową nad $\mathbb{Q}$ i niech $v \neq 0$ będzie wektorem izotropowym. Czy może mieć miejsce równość $W = \text{lin}(v) \oplus (\text{lin}(v))^\perp$?
 - Hiperpowierzchnia $X \subseteq \mathbb{R}^4$ jest opisana równaniem
$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 + x_1 = 0.$$
Czy X posiada środek symetrii, który do niej nie należy?