

Geometria z algebrą liniową II, 2020/2021

ćwiczenia 26.

8 czerwca 2021

1. $(\cdot)$ Znajdź macierze symetryczną A , macierz B oraz liczbę c takie, że

$$F((x, y)) = [x, y] \cdot A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + B \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + c,$$

gdzie $F((x, y)) = 2x^2 + 3y^2 + 10xy - 3x + 4y + 6$.

2. Niech $f: H \rightarrow K$ będzie funkcją wielomianową zdefiniowaną w układzie bazowym $p_0; \mathcal{A}$ przez wielomian drugiego stopnia

$$F(x_1, \dots, x_n) = x^T A x + B x + c$$

oraz w układzie $q_0, \mathcal{B}$ przez wielomian

$$G(y_1, \dots, y_n) = y^T A' y + B' y + c'.$$

Wykaż, że $A' = C^T A C$, gdzie $C = M(id)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$.

3. Dla poniższych funkcji wielomianowej na H , $\dim H = n$, znaleźć układ bazowy, w którym funkcji tej odpowiada wielomian postaci

$$a_1 x_1^2 + \dots + a_r x_r^2 + c,$$

$r = r(f)$, $a_1, \dots, a_r \neq 0$, lub

$$a_1 x_1^2 + \dots + a_r x_r^2 + x_n,$$

$r = r(f) < n$, $a_1, \dots, a_r \neq 0$,

a) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f((x, y)) = x^2 + 3y^2 + 2xy - 4x + y + 5$,

b) $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f((x, y, z)) = -4z^2 + xy + 2y - 6z + 1$.

4. Dla poniższych hiperpowierzchni w przestrzeni H , $\dim H = n$, znaleźć układ bazowy, w którym X jest opisana równaniem postaci

$$a_1 x_1^2 + \dots + a_r x_r^2 + c = 0,$$

$1 \leq r \leq n$, $a_1, \dots, a_r \neq 0$, lub

$$a_1 x_1^2 + \dots + a_r x_r^2 + x_n = 0,$$

$1 \leq r < n$, $a_1, \dots, a_r \neq 0$,

a) $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 - 2y^2 - 8xy + 6x + 4 = 0\}$,

b) $X = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4: x_1 x_2 + 2x_1 x_3 + 4x_2 x_4 - 7 = 0\}$.

5. Dla poniższych hiperpowierzchni w przestrzeni H , $\dim H = n$, znaleźć układ bazowy, w którym X jest opisana równaniem postaci

$$x_1^2 + \dots + x_r^2 + 1 = 0,$$

$1 \leq r \leq n$, lub

$$x_1^2 + \dots + x_r^2 = 0,$$

$2 \leq r \leq n - 1$, lub

$$x_1^2 + \dots + x_r^2 + x_n = 0,$$

$1 \leq r < n$,

- a) $X = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3: x^2 + 4y^2 - 4z^2 + 2ixy + 4iyz + 4y + 2 = 0\}$,
b) $X = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4: b^2 + 9d^2 + 2bc + 6icd + a + b + c + 3 = 0\}$.
6. Dla poniższych hiperpowierzchni w przestrzeni H , $\dim H = n$, znaleźć układ bazowy, w którym X jest opisana równaniem postaci
- $$\pm x_1^2 \pm \dots \pm x_r^2 + 1 = 0,$$
- $1 \leq r \leq n$, lub
- $$x_1^2 \pm \dots \pm x_r^2 = 0,$$
- $2 \leq r \leq n - 1$, lub
- $$\pm x_1^2 \pm \dots \pm x_r^2 + x_n = 0,$$
- $1 \leq r < n$,
- a) $X = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2: 3x_1^2 - x_2^2 + 2x_1x_2 + 6x_1 + 10 = 0\}$,
b) $X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: 2x^2 + 3y^2 - z^2 + 4xy - 2yz + 2x - 2y - 2z + 1 = 0\}$.
7. Udowodnić, że jeśli $p \in H$ jest środkiem hiperpowierzchni X w przestrzeni afinicznej H , to dla każdego izomorfizmu afinicznego $f: H \rightarrow H$, $f(p)$ jest środkiem symetrii $f[X]$.
8. Wypisz i naszkicuj wszystkie typy afiniczne właściwych hiperpowierzchni stopnia 2 w $\mathbb{R}^2$.
9. Określić typ afiniczny następujących krzywych w $\mathbb{R}^2$.
- a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + 5y^2 + 2xy + x - y = 0\}$,
b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2: 4x^2 + 25y^2 + 20xy + 10y + 3 = 0\}$.
10. (★) Dany jest wielomian $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ stopnia 2 oraz liczba $n \geq 1$. Udowodnij, że istnieje co najwyżej jeden wielomian $Q(x)$ stopnia n spełniający równanie $P(Q(x)) = Q(P(x))$, $x \in \mathbb{R}$.