

Geometria z algebrą liniową II, 2020/2021

ćwiczenia 25.

1 czerwca 2021

1. Podaj przykład trzech różnych wielomianów z $\mathbb{Z}_3[x]$, które zadają tę samą funkcję wielomianową $f: \mathbb{Z}_3 \rightarrow \mathbb{Z}_3$.
2. Wykaż, że zbiór wszystkich wielomianów stopnia co najwyżej m w przestrzeni liniowej $K[x_1, \dots, x_n]$ jest podprzestrzenią liniową. Znajdź wymiar tej podprzestrzeni.
3. Udowodnij, że jeśli H jest przestrzenią afiniczną nad ciałem K z układami bazowymi $p_0; v_1, \dots, v_n$ oraz $q_0; w_1, \dots, w_n$ oraz funkcję $f: H \rightarrow K$ można przestawić jako

$$f(p_0 + s_1 v_1 + \dots + s_n v_n) = F(s_1, \dots, s_n)$$

dla pewnego wielomianu $F \in K[x_1, \dots, x_n]$, to

$$f(q_0 + t_1 w_1 + \dots + t_n w_n) = G(t_1, \dots, t_n)$$

dla pewnego wielomianu $G \in K[x_1, \dots, x_n]$ oraz $\deg F = \deg G$.

4. (·) Niech H będzie przestrzenią afiniczną euklidesową oraz $p_0 \in H$. Wykaż, że funkcja $f: H \rightarrow \mathbb{R}$ zdefiniowana jako $f(p) = (d(p, p_0))^2$ jest funkcją wielomianową drugiego stopnia.
5. Wykaż, że każdy zbiór algebraiczny w przestrzeni afinicznej nad $\mathbb{R}$ jest hiperpowierzchnią.
6. Wykaż, że hiperpowierzchnie stopnia 1 w n -wymiarowej przestrzeni afinicznej to hiperpłaszczyzny w tej przestrzeni.
7. Niech

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x^3 + 2x^2z - 4yz^5 - 7 = 0\}.$$

Znajdź równanie opisujące tę hiperpowierzchnię w układzie bazowym

$$(2, 1, 3); (1, 1, 0), (0, 3, 1), (0, 1, 0).$$

8. (·) Rozpatrzmy izomorfizm afiniczny $h: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ zadany wzorem

$$h((x, y, z)) = (x + y + 4, 2x + y + 3z + 1, x + y + z + 2).$$

a) Niech

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x^2yz - 2y + 5 = 0\}.$$

Znajdź taki układ bazowy przestrzeni $\mathbb{R}^3$, w którym hiperpowierzchnia $h[X]$ jest opisana równaniem

$$x^2yz - 2y + 5 = 0.$$

b) Niech $Y \subseteq \mathbb{R}^3$ będzie hiperpowierzchnią taką, że

$$h[Y] = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: xy + yz - 3 = 0\}.$$

Znajdź taki układ bazowy przestrzeni $\mathbb{R}^3$, w którym hiperpowierzchnia Y jest opisana równaniem

$$xy + yz - 3 = 0.$$

9. Niech X będzie hiperpowierzchnią w przestrzeni H oraz L niech będzie prostą w H . Wykazać, że jeśli $|X \cap L| = k$, to $\deg X \geq k$.
10. (★) Niech $p(x, y) = (x^5 + x) - (y^5 + y)$ oraz $q(x, y) = (x^5 + x^2) - (y^5 + y^2)$ będą funkcjami wielomianowymi na $\mathbb{C}^2$. Znajdź wszystkie punkty

$$M = \{z \in \mathbb{C}^2 : p(z) = 0, q(z) = 0\} \setminus L,$$

gdzie $L = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : x - y = 0\}$