

Geometria z algebrą liniową II, 2020/2021

ćwiczenia 25. – szkice rozwiązań

1 czerwca 2021

1. Podaj przykład trzech różnych wielomianów z $\mathbb{Z}_3[x]$, które zadają tę samą funkcję wielomianową $f: \mathbb{Z}_3 \rightarrow \mathbb{Z}_3$.

Np.: $x + 1$, $x^3 + 1$, $2x^3 + 2x + 1$ dają tę samą funkcję, gdzie $f(0) = 1$, $f(1) = 2$ i $f(2) = 0$.

2. Wykaż, że zbiór wszystkich wielomianów stopnia co najwyżej m w przestrzeni liniowej $K[x_1, \dots, x_n]$ jest podprzestrzenią liniową. Znajdź wymiar tej podprzestrzeni.

Oczywiście suma dwóch takich wielomianów i taki wielomian przemnożony przez skalar nadal jest stopnia co najwyżej m .

Wymiar to tyle ile jest możliwych wyrazów, a każdy wyraz to $1^{a_0} x_1^{a_1} \dots x_n^{a_n}$, z tym że $a_0 + \dots + a_n = m$, czyli jest ich $\binom{m+n}{n}$.

3. Udowodnij, że jeśli H jest przestrzenią afiniczną nad ciałem K z układami bazowymi $p_0; v_1, \dots, v_n$ oraz $q_0; w_1, \dots, w_n$ oraz funkcję $f: H \rightarrow K$ można przestawić jako

$$f(p_0 + s_1 v_1 + \dots + s_n v_n) = F(s_1, \dots, s_n)$$

dla pewnego wielomianu $F \in K[x_1, \dots, x_n]$, to

$$f(q_0 + t_1 w_1 + \dots + t_n w_n) = G(t_1, \dots, t_n)$$

dla pewnego wielomianu $G \in K[x_1, \dots, x_n]$ oraz $\deg F = \deg G$.

$G(y_1, \dots, y_n)$ jest wielomianem powstałym z wielomianu F poprzez podstawienie $x_i = c_{i1} y_1 + \dots + c_{in} y_n + d_i$, gdzie $[c_{ij}] = M(id)_{\{w_1, \dots, w_n\}}^{\{v_1, \dots, v_n\}}$ oraz $q_0 = p_0 + w_1 v_1 + \dots + w_n v_n$. Jasne jest, że $\deg F = \deg G$.

4. ($\cdot$) Niech H będzie przestrzenią afiniczną euklidesową oraz $p_0 \in H$. Wykaż, że funkcja $f: H \rightarrow \mathbb{R}$ zdefiniowana jako $f(p) = (d(p, p_0))^2$ jest funkcją wielomianową drugiego stopnia.

Bierzemy ortonormalny układ bazowy $p; v_1, \dots, v_n$ i wtedy $f(p) = x_1^2 + \dots + x_n^2$, gdzie $q = p + x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$.

5. Wykaż, że każdy zbiór algebraiczny w przestrzeni afinicznej nad $\mathbb{R}$ jest hiperpowierzchnią.

Jeśli $X = \{p \in H: f_1(p) = 0, \dots, f_k(p) = 0\}$, to $X = \{p \in H: f_1^2(p) + \dots + f_k^2(p) = 0\}$ i oczywiście $f_1^2 + \dots + f_k^2$ też jest funkcją wielomianową.

6. Wykaż, że hiperpowierzchnie stopnia 1 w n -wymiarowej przestrzeni afinicznej to hiperpłaszczyzny w tej przestrzeni.

To, że każda hiperpowierzchnia stopnia 1 jest hiperpłaszczyzną wynika wprost z definicji. Ale każda hiperpłaszczyzna jest opisywalna jednym równaniem liniowym (z wyrazem wolnym), a to jest wielomian pierwszego stopnia.

7. Niech

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x^3 + 2x^2 z - 4yz^5 - 7 = 0\}.$$

Znajdź równanie opisujące tę hiperpowierzchnię w układzie bazowym

$$(2, 1, 3); (1, 1, 0), (0, 3, 1), (0, 1, 0).$$

$$\begin{aligned} p &= (2, 1, 3) + a(1, 1, 0) + b(0, 3, 1) + c(0, 1, 0) = (a + 2, a + 3b + c + 1, b + 3) = \\ &= (0, 0, 0) + (a + 2)(1, 0, 0) + (a + 3b + c)(0, 1, 0) + (b + 3)(0, 0, 1). \end{aligned}$$

Zatem to równanie to:

$$0 = x^3 + 2x^2z - 4yz^5 - 7 = (a + 2)^3 + 2(a + 2)^2(b + 3) - 4(a + 3b + c)(b + 3)^5 - 7.$$

8. $(\dots)$ Rozpatrzmy izomorfizm afiniczny $h: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ zadany wzorem

$$h((x, y, z)) = (x + y + 4, 2x + y + 3z + 1, x + y + z + 2).$$

a) Niech

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x^2yz - 2y + 5 = 0\}.$$

Znajdź taki układ bazowy przestrzeni $\mathbb{R}^3$, w którym hiperpowierzchnia $h[X]$ jest opisana równaniem

$$x^2yz - 2y + 5 = 0.$$

Wystarczy wziąć układ $h((0, 0, 0)); h'((1, 0, 0)), h'((0, 1, 0)), h'((0, 0, 1))$, czyli

$$(4, 1, 2); (1, 2, 1), (1, 1, 1), (0, 3, 1).$$

b) Niech $Y \subseteq \mathbb{R}^3$ będzie hiperpowierzchnią taką, że

$$h[Y] = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: xy + yz - 3 = 0\}.$$

Znajdź taki układ bazowy przestrzeni $\mathbb{R}^3$, w którym hiperpowierzchnia Y jest opisana równaniem

$$xy + yz - 3 = 0.$$

Trzeba odwrócić ten izomorfizm

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Czyli $(f^{-1})'(x, y, z) = (2x + y, -x - y + 3z, -x + z)$ oraz $f^{-1}((0, 0, 0)) = f^{-1}(4, 1, 2) - (f^{-1})'(4, 1, 2) = (0, 0, 0) - (9, 1, -2) = (-9, -1, 2)$, zatem ten układ bazowy to:

$$(-9, 1, 2); (2, -1, -1), (1, -1, 0), (0, 3, 1).$$

9. Niech X będzie hiperpowierzchnią w przestrzeni H oraz L niech będzie prostą w H . Wykazać, że jeśli $|X \cap L| = k$, to $\deg X \geq k$.

$L = p_0 + av$ dla pewnych stałych v . Wstawiając $(x_1, \dots, x_n) = p_0 + av$ do równania na X mamy wielomian tego samego stopnia jednej zmiennej, t.j. a . Ten wielomian ma k pierwiastków, więc jest stopnia co najmniej k .

10. $(\star)$ Niech $p(x, y) = (x^5 + x) - (y^5 + y)$ oraz $q(x, y) = (x^5 + x^2) - (y^5 + y^2)$ będą funkcjami wielomianowymi na $\mathbb{C}^2$. Znajdź wszystkie punkty

$$M = \{z \in \mathbb{C}^2: p(z) = 0, q(z) = 0\} \setminus L,$$

gdzie $L = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2: x - y = 0\}$

Zadanie IMC 2001. Niech

$$P(x, y) = \frac{p(x)}{x - y} = x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4 + 1,$$

$$Q(x, y) = \frac{q(x)}{x - y} = x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4 + x + y + 1$$

Szukamy punktów, że $P = Q = 0$, czyli $Q - P = x + y - 1 = 0$, zatem $x + y = 1$. Niech $a = xy$. Można wyliczyć, że:

$$a^2 - 3a + 2 = 0,$$

co daje $a = 1$ lub $a = 2$. Zatem dostajemy cztery punkty:

$$\left(\frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}, \frac{1 \mp \sqrt{3}i}{2} \right), \left(\frac{1 \pm \sqrt{7}i}{2}, \frac{1 \mp \sqrt{7}i}{2} \right).$$