

Geometria z algebrą liniową II, 2020/2021

ćwiczenia 24.

28 maja 2021

- Dla poniższej formy kwadratowej, podać jej postać diagonalną:
 - $q: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, q((x, y, z)) = xy - xz + yz.$
 - $q: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}, q((a, b, c, d)) = 2a^2 + b^2 + 2c^2 - d^2 + 4ab + 8cd.$
- ($\cdot$) Zbadać, czy forma kwadratowa jest dodatnio lub ujemnie określona:
 - $q: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, q((x_1, x_2)) = -x_1^2 + 4x_1x_2 - 5x_2^2,$
 - $q: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, q((x, y, z)) = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy + 2xz.$
 - $q: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}, q((a, b, c, d)) = a^2 + 3b^2 + 5c^2 + 7d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 6bd + 4cd.$
- Dla jakich wartości parametru $r \in \mathbb{R}$ forma kwadratowa $q: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, q((x, y, z)) = -x^2 + ry^2 + rz^2 + 4xy + 2yz$ jest ujemnie określona?
- Stosując wartości własne zbadać, czy forma kwadratowa jest dodatnio lub ujemnie określona lub półokreślona:
 - $q: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, q((x, y)) = x^2 + 9y^2 + 6xy,$
 - $q: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}, q((x, y, z, t)) = 5x^2 + 5y^2 + 4z^2 + t^2 + 6xy + 4zt.$
- ($\cdot$) Dla jakich wartości parametrów $r, s \in \mathbb{R}$ forma kwadratowa $q: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, q((x, y, z)) = x^2 + 2rxy + 4y^2 + sz^2$ jest:
 - dodatnio określona?
 - dodatnio półokreślona?
 - ujemnie określona?
 - ujemnie półokreślona?
 - nieokreślona?
- Rozpatrzmy formy kwadratowe $q_1: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, q_1(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 5x_2^2 + 7x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3$ oraz $q_2: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, q_2(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 + 2x_2x_3.$
 - Czy forma q_1 jest dodatnio określona?
 - Czy forma q_2 jest ujemnie półokreślona?
- Dla jakich $s \in \mathbb{R}$, forma
$$q_1: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, q_1((x_1, x_2, x_3)) = 3x_1^2 + x_2^2 + 7x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3$$
jest równoważna z formą
$$q_2: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, q_2((x_1, x_2, x_3)) = -x_1^2 + x_2^2 + sx_3^2 + 6x_1x_2 + 2x_2x_3?$$
- Niech $q: (\mathbb{Z}_2)^2 \rightarrow \mathbb{Z}_2$ będzie zadana wzorem $q((x, y)) = xy$. Wykazać, że nie istnieje forma dwuliniowa symetryczna $h: (\mathbb{Z}_2)^2 \times (\mathbb{Z}_2)^2 \rightarrow \mathbb{Z}_2$, taka, że dla każdego $v \in (\mathbb{Z}_2)^2, q(v) = h(v, v)$.
- Wykaż, że odwzorowanie $q: M_{n \times n}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ dane wzorem $q(A) = \text{tr} A^2$ jest formą kwadratową.

10. (★) Rozważmy czasoprzestrzeń $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$. Zgodnie ze szczególną teorią względności ważną rolę odgrywa przekształcenie Lorentza $L(x, y, z, t) = (x', y', z', t')$, gdzie

$$\begin{cases} x' = \gamma x + \gamma vt, \\ y' = y, \\ z' = z, \\ t' = \gamma t + \gamma \frac{v}{c^2} x \end{cases},$$

gdzie

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

które opisuje współrzędne (x', y', z', t') zdarzenia (punktu w czasoprzestrzeni) według obserwatora, który porusza się z prędkością v względem obserwatora, który uważa, że to wydarzenie ma czasoprzestrzenne współrzędne (x, y, z, t) . Jak widzisz norma euklidesowa (inaczej mówiąc forma kwadratowa $q(x, y, z, t) = x^2 + y^2 + z^2 + c^2 t^2$) nie jest zachowana przez to przekształcenie. Znajdź formę kwadratową rzędu 4, która jest przez to przekształcenie zachowywana. Zastanów się jakie wektory to wektory izotropowe w tej znalezionej formie? Jakie wektory dają wartość dodatnią, a jakie ujemną?