

Geometria z algebrą liniową II, 2020/2021

ćwiczenia 24. – szkice rozwiązań

28 maja 2021

1. Dla poniższej formy kwadratowej, podać jej postać diagonalną:

a) $q: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, q((x, y, z)) = xy - xz + yz.$

Macierz to

$$\begin{bmatrix} 0 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix},$$

a zatem wektorem nieizotropowym jest $v_1 = (1, 1, 0)$ (daje wartość 1) i prostopadłe do niego są wektory z $\text{lin}((1, -1, 0), (0, 0, 1))$, a $v_2 = (1, -1, 1)$ jest nieizotropowy (wartość -3). Prostopadły do obu jest $v_3 = (1, -1, -2)$ (wartość 3). Zatem

$$q(av_1 + bv_2 + cv_3) = a^2 - 3b^2 + 3c^2.$$

b) $q: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}, q((a, b, c, d)) = 2a^2 + b^2 + 2c^2 - d^2 + 4ab + 8cd.$

$$\begin{aligned} 2a^2 + b^2 + 2c^2 - d^2 + 4ab + 8cd &= \frac{1}{2}(2a + 2b)^2 - b^2 + 2c^2 - d^2 + 8cd = \\ &= \frac{1}{2}(2a + 2b)^2 - b^2 + 2c^2 - d^2 + 8cd = \frac{1}{2}(2a + 2b)^2 - b^2 + \frac{1}{2}(2c + 4d)^2 - 9d^2. \end{aligned}$$

Zatem, gdy $v_1 = (1/2, -1, 0, 0)$, $v_2 = (0, 1, 0, 0)$, $v_3 = (0, 0, 1/2, -2)$, $v_4 = (0, 0, 0, 1)$, to

$$q(av_1 + bv_2 + cv_3 + dv_4) = \frac{1}{2}a^2 - b^2 + \frac{1}{2}c^2 - 9d^2.$$

2. (·) Zbadać, czy forma kwadratowa jest dodatnio lub ujemnie określona:

a) $q: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, q((x_1, x_2)) = -x_1^2 + 4x_1x_2 - 5x_2^2,$

b) $q: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, q((x, y, z)) = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy + 2xz.$

c) $q: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}, q((a, b, c, d)) = a^2 + 3b^2 + 5c^2 + 7d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 6bd + 4cd.$

a) Macierz tej formy to: $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$. Badamy wyznaczniki głównych minorów: $\det A_1 = -1 < 0$, $\det A_2 = 5 - 4 = 1 > 0$, więc z kryterium Sylwestera macierz nie jest dodatnio określona, ale jest ujemnie określona.

b) Macierz tej formy to: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. Badamy wyznaczniki: $\det A_1 = 1 > 0$, $\det A_2 = 2 - 1 = 1 > 0$, $\det A_3 = 4 + 0 + 0 - 2 - 2 = 0$, czyli z kryterium Sylwestera forma nie jest ani ujemnie ani dodatnio określona.

c) Macierz tej formy to: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 7 \end{bmatrix}$. Badamy wyznaczniki: $\det A_1 = 1 > 0$, $\det A_2 = 3 - 1 = 2 > 0$, $\det A_3 = 15 + 1 + 1 - 3 - 1 - 5 = 8 > 0$, $\det A_4 = 30 > 0$, czyli z kryterium Sylwestera forma jest dodatnio określona.

3. Dla jakich wartości parametru $r \in \mathbb{R}$ forma kwadratowa $q: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, q((x, y, z)) = -x^2 + ry^2 + rz^2 + 4xy + 2yz$ jest ujemnie określona?

Macierz tej formy to: $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & r & 1 \\ 0 & 1 & r \end{bmatrix}$. Obliczamy wyznaczniki: $\det A_1 = -1$, $\det A_2 = -r-4$, $\det A_3 = -r^2 + 1 - 4r$. Czyli z kryterium Sylwestera potrzeba i wystarcza, by $-r-4 > 0$ i $r^2 + 4r - 1 > 0$. Z pierwszego warunku $r < -4$, z drugiego $r < -2 - \sqrt{5}$ lub $r > -2 + \sqrt{5}$, czyli ostatecznie q jest ujemnie określona dla $r < -2 - \sqrt{5}$.

4. Stosując wartości własne zbadać, czy forma kwadratowa jest dodatnio lub ujemnie określona lub półokreślona:

a) $q: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, q((x, y)) = x^2 + 9y^2 + 6xy$,

b) $q: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}, q((x, y, z, t)) = 5x^2 + 5y^2 + 4z^2 + t^2 + 6xy + 4zt$.

(a) Macierz tej formy to: $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$, czyli wielomian charakterystyczny to $w(\lambda) = (1-\lambda)(9-\lambda) - 9 = \lambda^2 - 10\lambda = \lambda(\lambda - 10)$, czyli wartościami własnymi są 0 i 10, a więc nie jest ta forma dodatnio ani ujemnie określona, nie jest też ujemnie półokreślona, za to jest dodatnio półokreślona.

(b) Macierz tej formy to: $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, wielomian charakterystyczny to: $w(\lambda) = ((5-\lambda)^2 - 9)((4-\lambda)(1-\lambda) - 4) = (\lambda^2 - 10\lambda + 16)(\lambda^2 - 5\lambda) = \lambda(\lambda - 2)(\lambda - 5)(\lambda - 8)$, czyli wartości własne to 0, 2, 5, 8, a więc podobnie jak poprzednio nie jest ta forma dodatnio ani ujemnie określona, nie jest też ujemnie półokreślona, za to jest dodatnio półokreślona.

5. ($\dots$) Dla jakich wartości parametrów $r, s \in \mathbb{R}$ forma kwadratowa $q: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, q((x, y, z)) = x^2 + 2rxy + 4y^2 + sz^2$ jest:

- a) dodatnio określona?
- b) dodatnio półokreślona?
- c) ujemnie określona?
- d) ujemnie półokreślona?
- e) nieokreślona?

Macierz tej formy to: $A = \begin{bmatrix} 1 & r & 0 \\ r & 4 & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix}$.

Wielomian charakterystyczny zatem to $(s-\lambda)((1-\lambda)(4-\lambda) - r^2)$, czyli wartości własne to

$$s, \frac{5 - \sqrt{9 + 4r^2}}{2}, \frac{5 + \sqrt{9 + 4r^2}}{2},$$

z czego ostatnia wartość jest zawsze dodatnia, zaś druga jest > 0 dla $r \in (-2, 2)$, $= 0$ dla $r = \pm 2$ i < 0 w przeciwnym przypadku, zatem nasza forma jest:

- (a) dodatnio określona o ile $s > 0$ oraz $r \in (-2, 2)$,
- (b) dodatnio półokreślona o ile $s \geq 0$ i $r \in [-2, 2]$,
- (c) ujemnie określona – nigdy,
- (d) ujemnie półokreślona – nigdy,
- (e) nieokreślona – jeśli $s < 0$ lub $r \notin (-2, 2)$.

6. Rozpatrzmy formy kwadratowe $q_1: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, q_1(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 5x_2^2 + 7x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3$ oraz $q_2: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, q_2(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 + 2x_2x_3$.

a) Czy forma q_1 jest dodatnio określona?

Mamy $A = M(q_1) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 7 \end{bmatrix}$. Zatem liczymy wyznaczniki kolejnych minorów.

$$\det A_1 = 1 > 0,$$

$$\det A_2 = 5 - 4 = 1 > 0,$$

$$\det A_3 = 35 - 5 - 28 = 2 > 0,$$

a zatem z kryterium Sylwestera ta forma jest dodatnio określona.

b) Czy forma q_2 jest ujemnie półokreślona?

Mamy $M(q_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Wyznacznik charakterystyczny tej macierzy to $w(\lambda) = -\lambda^3 + \lambda + \lambda = -\lambda(\lambda^2 - 2)$, a zatem wartości własne to $0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}$, a zatem forma nie jest ujemnie półokreślona, bowiem $\sqrt{2} > 0$.

7. Dla jakich $s \in \mathbb{R}$, forma

$$q_1: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, q_1((x_1, x_2, x_3)) = 3x_1^2 + x_2^2 + 7x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3$$

jest równoważna z formą

$$q_2: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, q_2((x_1, x_2, x_3)) = -x_1^2 + x_2^2 + sx_3^2 + 6x_1x_2 + 2x_2x_3?$$

W pierwszym przypadku $(0, 1, 0)$ jest nieizotropowy i daje wartość 1, a prostopadły do niego nieizotropowy wektor to $(1, -2, 0)$ z wartością -1 . Prostopadły do obu wektor to $(1, -2, 1)$ i daje wartość 8.

W drugim przypadku $(0, 1, 0)$ daje wartość 1, a prostopadły wektor $(1, -3, 0)$ daje wartość -10 . Prostopadły do obu jest $(3, 1, -10)$ i daje wartość $100s - 10$. Żeby były równoważne w takim razie $100s - 10 > 0$, czyli $s > 1/10$.

8. Niech $q: (\mathbb{Z}_2)^2 \rightarrow \mathbb{Z}_2$ będzie zadana wzorem $q((x, y)) = xy$. Wykazać, że nie istnieje forma dwuliniowa symetryczna $h: (\mathbb{Z}_2)^2 \times (\mathbb{Z}_2)^2 \rightarrow \mathbb{Z}_2$, taka, że dla każdego $v \in (\mathbb{Z}_2)^2$, $q(v) = h(v, v)$.

Wiadomo, że macierz takiej formy na przekątnej musi mieć zera, więc zostają tylko dwie opcje na taką macierz, skoro ma być symetryczna. Ale obie generują zerową formę kwadratową.

9. Wykaż, że odwzorowanie $q: M_{n \times n}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ dane wzorem $q(A) = \text{tr} A^2$ jest formą kwadratową.

Zdecydowanie, z definicji $q(A) = h(A, B)$, gdzie $h(A, B) = \text{tr}(A \cdot B)$, co jest formą dwuliniową, bowiem $\text{tr}((A_1 + A_2) \cdot B) = \text{tr}(A_1B + A_2B) = \text{tr}(A_1B) + \text{tr}(A_2B)$.

10. (★) Rozważmy czasoprzestrzeń $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$. Zgodnie ze szczególną teorią względności ważną rolę odgrywa przekształcenie Lorentza $L(x, y, z, t) = (x', y', z', t')$, gdzie

$$\begin{cases} x' = \gamma x + \gamma vt, \\ y' = y, \\ z' = z, \\ t' = \gamma t + \gamma \frac{v}{c^2} x \end{cases},$$

gdzie

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

które opisuje współrzędne (x', y', z', t') zdarzenia (punktu w czasoprzestrzeni) według obserwatora, który porusza się z prędkością v względem obserwatora, który uważa, że to wydarzenie ma czasoprzestrzenne współrzędne (x, y, z, t) . Jak widzisz norma euklidesowa (inaczej mówiąc forma kwadratowa $q(x, y, z, t) = x^2 + y^2 + z^2 + c^2 t^2$) nie jest zachowana przez to przekształcenie. Znajdź formę kwadratową rzędu 4, która jest przez to przekształcenie zachowywana. Zastanów się jakie wektory to wektory izotropowe w tej znalezionej formie? Jakie wektory dają wartość dodatnią, a jakie ujemną?

Jest to forma $q(x, y, z, t) = -x^2 - y^2 - z^2 + c^2 t^2$. Wektory izotropowe odpowiadają liniom światła, czyli liniom ruchu z prędkością c . Wartości ujemne dostaniemy dla ruchu z prędkością większą od prędkości światła, a dodatnie dla ruchu z prędkością mniejszą od prędkości światła.