

Geometria z algebrą liniową II, 2020/2021

ćwiczenia 24'.

28 maja 2021

1. Rozważmy przestrzeń afiniczną $\mathbb{R}^3$ ze standardowym iloczynem skalarnym. Niech

$$K = (1, 1, 1) + \text{lin}((2, 0, 1))$$

oraz $L = (1, 2, 1) + \text{lin}((1, 0, -2))$.

- a) Znaleźć wzór na takie przekształcenie afiniczne $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, że $f(p) = p$ dla każdego $p \in L$ oraz

$$f((1, 1, 1) + t(2, 0, 1)) = (1, 2, 1) + t(1, 0, -2),$$

dla $t \in \mathbb{R}$.

- b) Znaleźć odległość $\rho(K, L)$ między prostymi K i L .

- c) Ile jest izometrii $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, że

$$f((1, 1, 1) + t(2, 0, 1)) = (1, 2, 1) + t(1, 0, -2),$$

dla $t \in \mathbb{R}$ oraz $f[L] = K$.

2. Niech A, B, C będą trzema punktami przestrzeni afinicznej $\mathbb{R}^n$. Budujemy trzy środkowe $l_A = \text{af}(A, B/2 + C/2)$, $l_B = \text{af}(B, A/2 + C/2)$ oraz $l_C = \text{af}(C, A/2 + B/2)$.

- a) Udowodnij, że zbiór $l_A \cap l_B \cap l_C$ jest niepusty.

- b) Udowodnij, że jeśli $l_A \cap l_B$ ma co najmniej dwa punkty, to $\dim \text{af}(A, B, C) < 2$.

3. Badamy podprzestrzeń afiniczną $\mathbb{R}^4$:

$$A = \text{af}((1, 1, 1, 1), (1, 0, 1, 1), (0, 1, 0, 1), (3, 1, 3, 1))$$

oraz

$$B : \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 2 \\ x_1 + 2x_2 = 3 \end{cases}.$$

Znajdź bazę punktową $A \cap B$.

4. Napisz wzór i macierz rzutu $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ na prostą $l = \text{af}((1, -2, 3), (1, 0, 2))$ wzdłuż płaszczyzny opisanej równaniem

$$x_1 - x_2 + x_3 = 2.$$

5. Niech prosta $K \subseteq \mathbb{R}^3$ przechodzi przez punkty $(0, 1, 0)$ i $(1, 1, 0)$, zaś prosta $L = (1, 1, -1) + \text{lin}((0, -1, -1))$ oraz $p = (2, -1, -1)$. Znajdź:

- a) układ równań opisujący prostą przechodzącą przez punkt p oraz przecinającą proste K i L ,

- b) parametryzację tej prostej,

- c) wzór i macierz przekształcenia afinicznego $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ takiego, że $f(K) = \{(0, 0, -1)\}$ oraz $f(L) = \{(1, 0, 0)\}$.

6. Niech $L = (2, 1, 0) + \text{lin}((1, 0, -1)) \subseteq \mathbb{R}^3$ oraz

$$M = \{(x, y, z): x + 2y - z = 2\}.$$

Znaleźć:

- a) wzór na przekształcenie $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ będące rzutem na L wzdłuż

$$W = \text{lin}((1, 1, 1), (0, 1, 3)),$$

- b) parametryzację obrazu płaszczyzny M w jednokładności o środku $(0, 0, 1)$ i skali 2.

7. Wykonać następujące polecenia.

- a) Podać definicję iloczynu skalarnego na rzeczywistej przestrzeni liniowej oraz definicję iloczynu wektorowego wektorów $v_1, \dots, v_{n-1}$ w n -wymiarowej zorientowanej przestrzeni euklidesowej liniowej.
- b) Niech $\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ będzie iloczynem skalarnym na przestrzeni V oraz niech $v_1, \dots, v_k$ będzie układem prostopadłym niezerowych wektorów w przestrzeni V . Wykazać, że układ $v_1, \dots, v_k$ jest liniowo niezależny.

8. W przestrzeni $\mathbb{R}^3$ ze standardowym iloczynem skalarnym dane są

$$H = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3: x_1 + x_2 + x_3 = 2\}$$

oraz

$$L = (2, 0, 1) + \text{lin}((1, 0, 1))$$

$$K = (1, 2, 1) + \text{lin}((1, 1, 0))$$

a także krzywa $S = \{(t, t^2, t): t \in \mathbb{R}\}$.

- a) Znaleźć parametryzację prostej M będącej obrazem prostej L w symetrii prostopadłej względem płaszczyzny H .
- b) Obliczyć odległość prostej L od prostej K .
- c) Na krzywej S znaleźć punkt leżący na najbliższej płaszczyźnie H .

9. Rozwiąż następujące krótkie problemy.

- a) Niech będzie przestrzenią afiniczną wymiaru 6 i niech M_1, M_2 będą podprzestrzeniami afinicznymi H wymiaru 4. Czy może mieć miejsce równość $\dim M_1 \cap M_2 = 1$.
- b) Niech $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ będzie afiniczną przestrzenią euklidesową wymiaru 5 i niech M będzie taką podprzestrzenią afiniczną H , że symetria prostopadła względem M nie zmienia orientacji H . Jaki wymiar może mieć M ?
- c) Rozważmy takie przekształcenie afiniczne $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, że $f((0, 0, \dots, 0)) = (0, 0, \dots, 0)$. Czy f jest przekształceniem liniowym $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$?
- d) Niech M, N będą podprzestrzeniami przestrzeni afinicznej H . Czy z $M \cap N \neq \emptyset$ wynika, że dla każdego punktu $p \in M, q \in N$ wektor $\overrightarrow{pq} = \alpha + \beta$ dla pewnych $\alpha \in T(M), \beta \in T(N)$?
- e) Niech H_1 będzie podprzestrzenią afiniczną przestrzeni $\mathbb{R}^n$ i niech H_2 będzie podprzestrzenią afiniczną przestrzeni $\mathbb{R}^m$. Czy dla każdego przekształcenia afinicznego $f: H_1 \rightarrow H_2$ istnieje przekształcenie afiniczne $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ takie, że $F(p) = f(p)$ dla każdego $p \in H_1$?
- f) Niech $\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ będzie iloczynem skalarnym. Czy dla każdego skończonego wymiarowego podprzestrzeni $W \subseteq V$ zachodzi $V = W \oplus W^\perp$? Czy warunek, że W jest skończonego wymiaru jest istotny?
- g) Czy istnieje 5-wymiarowa przestrzeń euklidesowa liniowa $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ zawierająca układ 7 wektorów

$$v_1, \dots, v_7,$$

którego wyznacznik Grama $W(v_1, \dots, v_7)$ jest dodatni?

- h) Niech $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ będzie przestrzenią euklidesową afiniczną i niech M będzie jej podprzestrzenią. Niech $p_1 \in H$ oraz niech p_2 będzie rzutem prostopadłym p_1 na przestrzeń M . Czy przestrzeń M może zawierać punkt q taki, że $\rho(p_1, q) < \rho(p_1, p_2)$?
- i) Niech $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ będzie macierzą o kolumnach $k_1, \dots, k_n$ oraz niech $B \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ będzie macierzą o kolumnach $t_1, \dots, t_n$. Załóżmy, że $\det A = -3$ oraz $\det B = -7$. Czy bazy $k_1, \dots, k_n$ i $t_1, \dots, t_n$ są zgodnie zorientowane?

10. Niech $f: H \rightarrow H$ będzie przekształceniem afinicznym. Mówimy, że punkt $p \in H$ jest punktem stałym przekształcenia f , jeśli $f(p) = p$. Mówimy, że podprzestrzeń M przestrzeni H jest f -niezmiennicza, jeśli dla każdego $q \in M$ zachodzi $f(q) \in M$.
- a) Wykazać, że jeśli p jest punktem stałym przekształcenia f oraz $M \subseteq H$ jest podprzestrzenią f -niezmienniczą, to H zawiera podprzestrzeń f -niezmienniczą N taką, że $p \in N$, $\dim N = \dim M$ oraz N i M są równoległe.
- b) Wykazać, że jeśli przekształcenie f ma dokładnie jeden punkt stały, to każda podprzestrzeń f -niezmiennicza zawiera ten punkt stały.