

Geometria z algebrą liniową II, 2020/2021

ćwiczenia 24'. – szkice rozwiązań

28 maja 2021

1. Rozważmy przestrzeń afiniczną $\mathbb{R}^3$ ze standardowym iloczynem skalarnym. Niech

$$K = (1, 1, 1) + \text{lin}((2, 0, 1))$$

$$\text{oraz } L = (1, 2, 1) + \text{lin}((1, 0, -2)).$$

- a) Znaleźć wzór na takie przekształcenie afiniczne $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, że $f(p) = p$ dla każdego $p \in L$ oraz

$$f((1, 1, 1) + t(2, 0, 1)) = (1, 2, 1) + t(1, 0, -2),$$

dla $t \in \mathbb{R}$.

Mamy $f((1, 2, 1)) = (1, 2, 1)$ oraz $f'((1, 0, -2)) = (1, 0, -2)$. $f((1, 2, 1) + (0, -1, 0)) = f((1, 1, 1)) = (1, 2, 1) + (0, 0, 0)$, więc $f'((0, -1, 0)) = (0, 0, 0)$ oraz $f((1, 2, 1) + (-2, -1, -1)) = f((-1, 1, 0)) = (0, 2, 3) = (1, 2, 1) + (-1, 0, 2)$, a więc $f'((-2, -1, -1)) = (-1, 0, 2)$. Zatem $f'((1, 0, 0)) = (7/5, 0, -8/5)$, $f'((0, 1, 0)) = (0, 0, 0)$ oraz $f'((0, 0, 1)) = (-1/5, 0, 2/5)$, zatem $f'((x, y, z)) = \frac{1}{5}(7x - z, 0, -8x + 2z)$ oraz $f((0, 0, 0)) = (1, 2, 1) - \frac{1}{5}(6, 0, -6) = \frac{1}{5}(-1, 10, 11)$. Zatem

$$f((x, y, z)) = \frac{1}{5}(7x - z - 1, 10y, -8x + 2z + 11).$$

- b) Znaleźć odległość $\rho(K, L)$ między prostymi K i L .

Równania na przestrzeń prostopadłą to $2x + z = 0$ oraz $x - 2z = 0$, zatem przestrzeń prostopadłą do obu to $\text{lin}((0, 1, 0))$ i taki wektor akurat łączy punkty $(1, 1, 1)$ oraz $(1, 2, 1)$, czyli ta odległość to 1.

- c) Ile jest izometrii $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, że

$$f((1, 1, 1) + t(2, 0, 1)) = (1, 2, 1) + t(1, 0, -2),$$

dla $t \in \mathbb{R}$ oraz $f[L] = K$.

Czyli również $f[K] = L$. W szczególności f' jest izometrią liniową na $\text{lin}((2, 0, 1), (1, 0, -2))$, w której $f'(2, 0, 1) = (1, 0, -2)$. Takich izometrii jest dwie. Zatem są tylko cztery izometrie liniowe takie, że $f'(0, 1, 0) = (0, 1, 0)$ lub $f'(0, 1, 0) = -(0, 1, 0)$. Mając dane f' oraz wiedząc, że $f((1, 1, 1)) = (1, 2, 1)$ przekształcenie f jest wyznaczone jednoznacznie. Czyli jest takich izometrii cztery.

2. Niech A, B, C będą trzema punktami przestrzeni afinicznej $\mathbb{R}^n$. Budujemy trzy środkowe $l_A = \text{af}(A, B/2 + C/2)$, $l_B = \text{af}(B, A/2 + C/2)$ oraz $l_C = \text{af}(C, A/2 + B/2)$.

- a) Udowodnij, że zbiór $l_A \cap l_B \cap l_C$ jest niepusty.

Punkt $X = A/3 + B/3 + C/3 = A/3 + (2/3)(B/2 + C/2) = B/3 + (2/3)(A/2 + C/2) = C/3 + (2/3)(A/2 + B/2)$ leży na wszystkich trzech prostych.

- b) Udowodnij, że jeśli $l_A \cap l_B$ ma co najmniej dwa punkty, to $\dim \text{af}(A, B, C) < 2$.

Przecięcie dwóch podprzestrzeni afinicznych jest podprzestrzenią afiniczną, a skoro $l_A \cap l_B$ ma co najmniej dwa punkty, to jest to co najmniej prosta. Tymczasem l_A jest to co najwyżej prosta, której $l_A \cap l_B$ jest podprzestrzenią. Zatem $l_A = l_A \cap l_B$ oraz analogicznie $l_B = l_A \cap l_B$, czyli $l_A = l_B$. Zatem $B/2 + C/2 \in \text{af}(B, A/2 + C/2)$. Zatem

$$B/2 + C/2 = (1 - t)B + tA/2 + tC/2,$$

zatem

$$(1-t)C = tA + (1-2t)B,$$

co jeśli $1-t \neq 0$ daje

$$C = tA/(1-t) + (1-2t)B/(1-t),$$

czyli $C \in \text{af}(A, B)$, a zatem $\dim \text{af}(A, B, C) = \dim \text{af}(A, B) < 2$. Jeśli zaś $t = 1$, to

$$B/2 + C/2 = A/2 + C/2,$$

czyli $A = B$ i także $\dim \text{af}(A, B, C) = \dim \text{af}(A, C) < 2$.

3. Badamy podprzestrzeń afiniczną $\mathbb{R}^4$:

$$A = \text{af}((1, 1, 1, 1), (1, 0, 1, 1), (0, 1, 0, 1), (3, 1, 3, 1))$$

oraz

$$B : \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 2 \\ x_1 + 2x_2 = 3 \end{cases}.$$

Znajdź bazę punktową $A \cap B$.

Mamy: $A = (1, 1, 1, 1) + \text{lin}((0, -1, 0, 0), (-1, 0, -1, 0), (2, 0, 2, 0)) = (1, 1, 1, 1) + \text{lin}((1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 0))$
oraz

$$T(B) : \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}.$$

Zatem $T(A) = \{(a, b, a, 0) : a, b \in \mathbb{R}\}$, sprawdzamy kiedy taki wektor leży w $T(B)$:

$$\begin{cases} a + 2b = 0 \\ a + 2b = 0 \end{cases}$$

Czyli taki $T(A) \cap T(B) = T(A \cap B) = \text{lin}((-2, 1, -2, 0))$. Zatem skoro $(1, 1, 1, 1) \in A \cap B$, to bazą punktową $A \cap B$ jest $(1, 1, 1, 1), (-1, 2, -1, 1)$.

4. Napisz wzór i macierz rzutu $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ na prostą $l = \text{af}((1, -2, 3), (1, 0, 2))$ wzdłuż płaszczyzny opisanej równaniem

$$x_1 - x_2 + x_3 = 2.$$

Niech $M : x_1 - x_2 + x_3 = 2$, zatem $T(M) = \text{lin}((1, 1, 0), (-1, 0, 1))$. Natomiast $l = (1, -2, 3) + \text{lin}((0, 2, -1))$. Zatem $f'((1, 1, 0)) = f'((-1, 0, 1)) = (0, 0, 0)$ oraz $f'((0, 2, -1)) = (0, 2, -1)$. Zatem

$$f'((1, 0, 0)) = (0, 2, -1)/3,$$

$$f'((0, 1, 0)) = (0, -2, 1)/3,$$

$$f'((0, 0, 1)) = (0, 2, -1)/3.$$

Natomiast

$$\begin{aligned} f((0, 0, 0)) &= f((1, -2, 3)) - f'((1, -2, 3)) = \\ &= (1, -2, 3) - (0, 2, -1)/3 + 2(0, -2, 1)/3 - 3(0, 2, -1)/3 = (1, -6, 13/3). \end{aligned}$$

Zatem

$$f(v) = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot v^T + \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \\ 13/3 \end{bmatrix}.$$

5. Niech prosta $K \subseteq \mathbb{R}^3$ przechodzi przez punkty $(0, 1, 0)$ i $(1, 1, 0)$, zaś prosta $L = (1, 1, -1) + \text{lin}((0, -1, -1))$ oraz $p = (2, -1, -1)$. Znajdź:

- a) układ równań opisujący prostą przechodzącą przez punkt p oraz przecinającą proste K i L ,

Prosta ta leży na przecięciu płaszczyzny M_1 przechodzącej przez p i zawierającą K oraz płaszczyzny M_2 zawierającej p i L .

Mamy $T(M_1) = \text{lin}((1, 0, 0), (2, -2, -1))$, zatem jest opisane równaniem $y - 2z = 0$, zaś $T(M_2) = \text{lin}((0, -1, -1), (1, -2, 0))$, zatem jest opisane równaniem $2x + y - z = 0$, zatem jeśli N to szukana prosta, to $T(N)$ jest opisane układem równań:

$$\begin{cases} y - 2z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases}$$

a skoro $p \in N$, to układ równań na N to

$$\begin{cases} y - 2z = 1 \\ 2x + y - z = 4 \end{cases}$$

- b) parametryzację tej prostej,

Rozwiązując układ równań na $T(N)$ dostajemy, że jest rozpięte przez $(-1, 4, 2)$, zatem

$$N = (2, -1, -1) + t(-1, 4, 2) = (2 - t, -1 + 4t, -1 + 2t),$$

$t \in \mathbb{R}$.

- c) wzór i macierz przekształcenia afinicznego $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ takiego, że $f(K) = \{(0, 0, -1)\}$ oraz $f(L) = \{(1, 0, 0)\}$.

Mamy: $f(0, 1, 0) = (0, 0, -1)$, $f(1, 1, 0) = (0, 0, -1)$, $f(1, 1, -1) = (1, 0, 0)$ i $f(1, 0, -2) = (1, 0, 0)$. Co więcej $(0, 0, 0) = (0, 1, 0) + (1, 1, 0) - 2(1, 1, -1) + (1, 0, -2)$ jest kombinacją afiniczną ($1 + 1 - 2 + 1 = 1$), zatem

$$f(0, 0, 0) = (0, 0, -1) + (0, 0, -1) - 2(1, 0, 0) + (1, 0, 0) = (-1, 0, -2).$$

Liczymy pochodną:

$$f'(1, 0, 0) = f(1, 1, 0) - f(0, 1, 0) = (0, 0, 0),$$

$$f'(0, 1, 0) = f(0, 1, 0) - f(0, 0, 0) = (1, 0, 1),$$

$$f'(0, 0, 1) = f(1, 1, 0) - f(1, 1, -1) = (-1, 0, -1).$$

Zatem $f(x, y, z) = (y - z - 1, 0, y - z - 2)$. Oraz

$$f(v)^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} v^T + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

6. Niech $L = (2, 1, 0) + \text{lin}((1, 0, -1)) \subseteq \mathbb{R}^3$ oraz

$$M = \{(x, y, z): x + 2y - z = 2\}.$$

Znaleźć:

- a) wzór na przekształcenie $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ będące rzutem na L wzdłuż

$$W = \text{lin}((1, 1, 1), (0, 1, 3)),$$

$$f'((1, 0, -1)) = (1, 0, -1)$$

$$f'((1, 1, 1)) = (0, 0, 0)$$

$$f'((0, 1, 3)) = (0, 0, 0)$$

Zatem $f'((x, y, z)) = (2x - 3y + z, 0, -2x + 3y - z)$. $f((0, 0, 0)) = f((2, 1, 0)) - f'((2, 1, 0)) = (2, 1, 0) - (1, 0, -1) = (1, 1, 1)$. Zatem

$$f((x, y, z)) = (2x - 3y + z + 1, 1, -2x + 3y - z + 1).$$

b) parametryzację obrazu płaszczyzny M w jednokładności o środku $(0, 0, 1)$ i skali 2.

$$M = \{(2 - 2y + z, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\} = (2, 0, 0) + \text{lin}((-2, 1, 0), (1, 0, 1)).$$

Ale $g((2, 0, 0)) = (0, 0, 1) + 2(2, 0, -1) = (4, 0, -1)$. Zatem szukany obraz to

$$(4, 0, -1) + \text{lin}((-2, 1, 0), (1, 0, 1)) = \{(3 - 2a + b, a, b) \in \mathbb{R}^3 : a, b \in \mathbb{R}\}.$$

7. Wykonać następujące polecenia.

a) Podać definicję iloczynu skalarnego na rzeczywistej przestrzeni liniowej oraz definicję iloczynu wektorowego wektorów $v_1, \dots, v_{n-1}$ w n -wymiarowej zorientowanej przestrzeni euklidesowej liniowej.

Iloczyn skalarny dwóch wektorów α, β , to funkcja $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, $\langle \alpha, \beta \rangle$, taka, że:

- (i) $\langle au + bv, w \rangle = a\langle u, w \rangle + b\langle v, w \rangle$,
- (ii) $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$,
- (iii) dla każdego niezerowego u , $\langle u, u \rangle > 0$.

Powiemy, że v_n jest iloczynem wektorowym wektorów $v_1, \dots, v_{n-1}$ (ozn. $v_n = v_1 \times \dots \times v_{n-1}$), jeśli

- (i) $v_n = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $v_1, \dots, v_{n-1}$ jest układem liniowo zależnym,
- (ii) w przeciwnym przypadku, $v_1, \dots, v_{n-1}, v_n$ jest dodatnio zorientowaną bazą V ,

$$v_n \in (\text{lin}(v_1, \dots, v_{n-1}))^\perp$$

oraz

$$\|v_n\| = \sqrt{W(v_1, \dots, v_{n-1})}.$$

b) Niech $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ będzie iloczynem skalarnym na przestrzeni V oraz niech $v_1, \dots, v_k$ będzie układem prostopadłym niezerowych wektorów w przestrzeni V . Wykazać, że układ $v_1, \dots, v_k$ jest liniowo niezależny.

Założmy, że $a_1 v_1 + \dots + a_k v_k = 0$, wtedy

$$\langle a_1 v_1 + \dots + a_k v_k \rangle = \langle 0, 0 \rangle$$

Ale

$$\langle a_1 v_1 + \dots + a_k v_k \rangle = \sum_{1 \leq i, j \leq k} \langle a_i v_i, a_j v_j \rangle$$

Natomiast, skoro są prostopadłe dla $i \neq j$, $\langle v_i, v_j \rangle = 0$, zatem

$$0 = \langle a_1 v_1 + \dots + a_k v_k \rangle = \sum_{i=1}^k a_i^2 \|v_i\|^2$$

Zatem dla każdego i , $a_i^2 \|v_i\|^2 = 0$, a skoro wektory są niezerowe, to $a_i = 0$, co dowodzi ich liniowej niezależności.

8. W przestrzeni $\mathbb{R}^3$ ze standardowym iloczynem skalarnym dane są

$$H = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 2\}$$

oraz

$$L = (2, 0, 1) + \text{lin}((1, 0, 1))$$

$$K = (1, 2, 1) + \text{lin}((1, 1, 0))$$

a także krzywa $S = \{(t, t^2, t) : t \in \mathbb{R}\}$.

a) Znaleźć parametryzację prostej M będącej obrazem prostej L w symetrii prostopadłej względem płaszczyzny H .

$n = (1, 1, 1)$, $(3/2, 0, 1/2) \in H \cap L$. Kierunek rzutu $T(L)$ na $T(H)$ to

$$r = (1, 0, 1) - \frac{2}{3}(1, 1, 1) = \frac{1}{3}(1 - 2, 1).$$

Zatem kierunek symetryczny to $\frac{2}{3}(1, -2, 1) - (1, 0, 1) = \frac{1}{3}(-1, -4, -1)$. To znaczy, że

$$M = (3/2, 0, 1/2) + \text{lin}((1, 4, 1)) = \{(3/2 + a, 4a, 1/2 + a) : a \in \mathbb{R}\}.$$

- b) Obliczyć odległość prostej L od prostej K .

Przestrzenie prostopadłe są opisane odpowiednio przez równania $x + z = 0$ oraz $x + y = 0$ co daje $(1, -1, -1)$ jako kierunek prostopadły do obu prostych. Zatem płaszczyzna $x - y - z = 0$ jest równoległa do dwóch równoległych płaszczyzn zawierających te proste. Jedną to $x - y - z = 1$ a drugą to $x - y - z = -2$. $(1, 0, 0)$ jest punktem pierwszej z nich, zaś $(1, 0, 0) - (1, -1, -1) = (0, 1, 1)$ jest punktem drugiej z nich, gdzie $(1, -1, -1)$ jest prostopadły, więc wyznacza odległość pomiędzy nimi, która wynosi $\sqrt{3}$.

- c) Na krzywej S znaleźć punkt leżący na najbliższej płaszczyźnie H .

Płaszczyzny równoległe do H to $x_1 + x_2 + x_3 = a$. Patrzymy jakie a może osiągnąć nasza krzywa. Wartość a dla punktu na krzywej to $t^2 + 2t$, czyli może nawet osiągnąć 2 dla $t^2 + 2t = 2$, czyli $t^2 + 2t - 2 = 0$, dla $t_1 = -1 - \sqrt{3}$ oraz $t_2 = -1 + \sqrt{3}$ leży na płaszczyźnie H i są to punkty $(-1 - \sqrt{3}, 4 + 2\sqrt{3}, -1 - \sqrt{3})$ oraz $(1 - \sqrt{3}, 4 - 2\sqrt{3}, 1 - \sqrt{3})$.

9. Rozwiąż następujące krótkie problemy.

- a) Niech będzie przestrzenią afiniczną wymiaru 6 i niech M_1, M_2 będą podprzestrzeniami afinicznymi H wymiaru 4. Czy może mieć miejsce równość $\dim M_1 \cap M_2 = 1$.

$$6 \geq 4 + 4 - \dim M_1 \cap M_2,$$

więc

$$\dim M_1 \cap M_2 \geq 2,$$

a więc nie.

- b) Niech $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ będzie afiniczną przestrzenią euklidesową wymiaru 5 i niech M będzie taką podprzestrzenią afiniczną H , że symetria prostopadła względem M nie zmienia orientacji H . Jaki wymiar może mieć M ?

Wyznacznik macierzy zmiany bazy zostanie przemnożony przez $(-1)^p$, gdzie p jest wymiarem przestrzeni prostopadłej do M , czyli p ma być parzyste, zatem M ma nieparzysty wymiar.

- c) Rozważmy takie przekształcenie afiniczne $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, że $f((0, 0, \dots, 0)) = (0, 0, \dots, 0)$. Czy f jest przekształceniem liniowym $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$?

Tak, $f((0, \dots, 0))$ to wyrazy wolne we wzorze na f , a skoro ich nie ma, to jest to przekształcenie liniowe.

- d) Niech M, N będą podprzestrzeniami przestrzeni afinicznej H . Czy z $M \cap N \neq \emptyset$ wynika, że dla każdego punktu $p \in M, q \in N$ wektor $\overrightarrow{pq} = \alpha + \beta$ dla pewnych $\alpha \in T(M), \beta \in T(N)$?

Tak. Niech $p_0 \in M \cap N$. Wtedy $p - q = p_0 + v - p_0 - w$, gdzie $v \in T(M)$ i $w \in T(N)$. Bierzemy $\alpha = v$ i $\beta = -w$.

- e) Niech H_1 będzie podprzestrzenią afiniczną przestrzeni $\mathbb{R}^n$ i niech H_2 będzie podprzestrzenią afiniczną przestrzeni $\mathbb{R}^m$. Czy dla każdego przekształcenia afinicznego $f: H_1 \rightarrow H_2$ istnieje przekształcenie afiniczne $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ takie, że $F(p) = f(p)$ dla każdego $p \in H_1$?

Niech V będzie takie, że $T(H_1) \oplus V = \mathbb{R}^n$. Niech $g: \mathbb{R}^n \rightarrow H_2$ będzie rzutem na H_2 wzdłuż V . Wtedy $F = f \circ g$ spełnia warunki zadania.

- f) Niech $\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ będzie iloczynem skalarnym. Czy dla każdej skończonej wymiarowej podprzestrzeni $W \subseteq V$ zachodzi $V = W \oplus W^\perp$? Czy warunek, że W jest skończonej wymiarowa jest istotny?

Owszem, niech $W = \text{lin}(v_1, \dots, v_n)$ i niech $v_1, \dots, v_n$ będą prostopadłe. Jasne jest, że $W^\perp \cap W = \{0\}$. Ale też dla każdego $v \in V$

$$v = \frac{\langle v, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 + \dots + \frac{\langle v, v_n \rangle}{\langle v_n, v_n \rangle} v_n + \left(v - \left(\frac{\langle v, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 + \dots + \frac{\langle v, v_n \rangle}{\langle v_n, v_n \rangle} v_n \right) \right),$$

ale końcowy nawias należy do $W^\perp$, co łatwo sprawdzić.

Tak jest kluczowe. $l_2 \neq \mathbb{R}_c^\infty \oplus \{0\}$, ale $\{0\} = (\mathbb{R}_c^\infty)^\perp$ w l_2 .

- g) Czy istnieje 5-wymiarowa przestrzeń euklidesowa liniowa $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ zawierająca układ 7 wektorów

$$v_1, \dots, v_7,$$

którego wyznacznik Grama $W(v_1, \dots, v_7)$ jest dodatni?

Nie, skoro ten układ nie jest liniowo niezależny, wyznacznik jego macierzy Grama to zero.

- h) Niech $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ będzie przestrzenią euklidesową afiniczną i niech M będzie jej podprzestrzenią. Niech $p_1 \in H$ oraz niech p_2 będzie rzutem prostopadłym p_1 na przestrzeń M . Czy przestrzeń M może zawierać punkt q taki, że $\rho(p_1, q) < \rho(p_1, p_2)$?
- Nie, rzut prostopadły minimalizuje odległość.
- i) Niech $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ będzie macierzą o kolumnach $k_1, \dots, k_n$ oraz niech $B \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ będzie macierzą o kolumnach $t_1, \dots, t_n$. Załóżmy, że $\det A = -3$ oraz $\det B = -7$. Czy bazy $k_1, \dots, k_n$ i $t_1, \dots, t_n$ są zgodnie zorientowane?
- Skoro $A = M(id)_{\mathcal{A}}^{st}$ oraz $B = M(id)_{\mathcal{B}}^{st}$, to $M(id)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = A \cdot B^{-1}$, zatem jej wyznacznik to $-3/-7 > 0$, czyli są zgodnie zorientowane.
10. Niech $f: H \rightarrow H$ będzie przekształceniem afinicznym. Mówimy, że punkt $p \in H$ jest punktem stałym przekształcenia f , jeśli $f(p) = p$. Mówimy, że podprzestrzeń M przestrzeni H jest f -niezmiennicza, jeśli dla każdego $q \in M$ zachodzi $f(q) \in M$.
- a) Wykazać, że jeśli p jest punktem stałym przekształcenia f oraz $M \subseteq H$ jest podprzestrzenią f -niezmienniczą, to H zawiera podprzestrzeń f -niezmienniczą N taką, że $p \in N$, $\dim N = \dim M$ oraz N i M są równoległe.
- Zatem dla każdego $v \in T(M)$, $f'(v) \in T(M)$. Niech $N = p + T(M)$, czyli $T(N) = T(M)$. Wtedy dla $v \in T(N)$, $f(p+v) = f(p) + f'(v) = p + f'(v) \in N$, skoro $p \in N$ i $f'(v) \in T(N)$. Więc N ma żądane właściwości.
- b) Wykazać, że jeśli przekształcenie f ma dokładnie jeden punkt stały, to każda podprzestrzeń f -niezmiennicza zawiera ten punkt stały.
- Rozważmy $V = H - p$ oraz $f': V \rightarrow V$ będące przekształceniem liniowym. Zauważmy, że jeśli f nie ma innych punktów stałych to 1 nie jest wartością własną f' . Ale jeśli M jest podprzestrzenią f -niezmienniczą, to $N = M - p$ jest f' -niezmiennicza i założmy, że $0 \notin N$. Niech $\mathcal{B}$ będzie bazą $T(N)$ oraz niech $v \in N$, wtedy $\{v\} \cup \mathcal{B}$ jest bazą przestrzeni $\text{lin}(N)$. Ale skoro v przechodzi na element N , to $f'(v) = v + w$, gdzie w jest kombinacją wektorów z $\mathcal{B}$. Tymczasem każdy wektor z $\mathcal{B}$ przechodzi na kombinację wektorów z $\mathcal{B}$. Zatem macierz f' w bazie $v \cup \{\mathcal{B}\}$ ma w pierwszym wierszu 1 i same zera. Ale to oznacza, że 1 jest wartością własną f' – sprzeczność.