

Geometria z algebrą liniową II, 2018/2019

ćwiczenia 23.

28 maja 2019

1. Znajdź bazę prostopadłą formy dwuliniowej $h: \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ zadanej wzorem

$$h((x_1, x_2, x_3, x_4), (y_1, y_2, y_3, y_4)) = \\ = 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 5x_4y_4.$$

2. $(\cdot)$ Udowodnij, że baza $\mathcal{A}$ jest prostopadła względem formy dwuliniowej $h: V \times V \rightarrow K$ wtedy i tylko wtedy, gdy $G(h, \mathcal{A})$ jest macierzą diagonalną.

3. Dla każdej z poniższych macierzy znaleźć macierz diagonalną, która jest do niej kongruentna.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}),$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R}),$$

$$\begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 1 \end{bmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{C}),$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{Z}_2).$$

4. Znajdź sygnaturę macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \end{bmatrix} \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R}).$$

5. Rozstrzygnij ile jest klas abstrakcji relacji kongruencji na zbiorze symetrycznych macierzy $n \times n$

- a) nad $\mathbb{R}$?
b) nad $\mathbb{C}$?

6. $(\cdot)$ Niech

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & t \end{bmatrix}$$

oraz

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dla jakich $t \in \mathbb{R}$ macierze A i B są kongruentne

- a) nad $\mathbb{R}$?
b) nad $\mathbb{C}$?
c) nad $\mathbb{Q}$?
d) dla $t = 3/2$ znaleźć macierz C taką, że $C^T A C = B$

7. Dla formy dwuliniowej $h: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ zadanej wzorem

$$h((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = \\ = x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 2x_2y_2 - 2x_2y_3 - 2x_3y_2 + 3x_3y_3$$

znaleźć bazę $\mathbb{R}^3$, która jest ortogonalna względem h i ortonormalna względem standardowego iloczynu skalarnego.

8. $(\star)$ Niech ξ będzie formą dwuliniową nad skończeniem wymiarową przestrzenią V oraz niech $\xi', \xi'': V \rightarrow V^*$ będą dane jako $(\xi''(v))(w) = \xi(v, w)$ oraz $(\xi'(v))(w) = \xi(w, v)$. Udowodnij, że $\xi'' = (\xi')^*$ (przy standardowym utożsamieniu V i V^{**}).