

Geometria z algebrą liniową II, 2018/2019

ćwiczenia 20.

17 maja 2019

1. ($\cdot$) Udowodnij, że jeśli $v \in V$, gdzie V jest przestrzenią liniową nad $\mathbb{C}$ oraz $\xi: V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ jest formą hermitowską, to $\xi(v, v) \in \mathbb{R}$.
2. Udowodnij, że $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ jest macierzą formy półtoraliniowej $\xi: V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ w bazie $\{v_1, \dots, v_n\}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $A = [a_{ij}]_{1 \leq i, j \leq n}$, gdzie $a_{ij} = \xi(v_i, v_j)$.
3. Niech A będzie macierzą formy półtoraliniowej $\xi: V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ w bazie $\mathcal{A}$. Udowodnij, że:
 - a) macierz A jest hermitowska wtedy i tylko wtedy, gdy ξ jest hermitowska,
 - b) jeśli ξ jest iloczynem hermitowskim, to $\mathcal{A}$ jest ortonormalna wtedy i tylko wtedy, gdy A jest diagonalna.
4. Niech $(V_1, \langle \cdot, \cdot \rangle_1)$ i $(V_2, \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$ będą przestrzeniami unitarnymi n -wymiarowymi oraz niech $\psi: V_1 \rightarrow V_2$ będzie izomorfizmem liniowym. Niech $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ to będą bazy odpowiednio V_1 i V_2 oraz niech B_1, B_2 będą macierzami odpowiednio $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ oraz $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ odpowiednio w bazach $\mathcal{B}_1$ i $\mathcal{B}_2$. Niech w końcu, $A = M(\psi)_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2}$. Udowodnij, że ψ jest izomorfizmem unitarnym wtedy i tylko wtedy, gdy $B_1 = A^T B_2 \bar{A}$.
5. Niech $(V_1, \langle \cdot, \cdot \rangle_1)$ i $(V_2, \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$ będą przestrzeniami unitarnymi n -wymiarowymi oraz niech $\psi: V_1 \rightarrow V_2$ będzie izomorfizmem liniowym. Niech $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ to będą bazy ortonormalne odpowiednio V_1 i V_2 oraz niech $A = M(\psi)_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2}$. Udowodnij, że ψ jest izomorfizmem unitarnym wtedy i tylko wtedy, gdy $A^T \bar{A} = I$.
6. Wykaż, że macierz $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ jest unitarna wtedy i tylko wtedy gdy jej kolumny (równoważnie, wiersze) stanowią bazę ortonormalną przestrzeni unitarnej $\mathbb{C}^n$ ze standardowym iloczynem hermitowskim.
7. Wykaż, że moduły wartości własnych automorfizmów przestrzeni unitarnych są równe 1.
8. ($\cdot$) Wykaż, że dla każdego automorfizmu przestrzeni unitarnej istnieje ortonormalna baza złożona z wektorów własnych.
9. Niech (V, ξ) będzie przestrzenią unitarną. Rozważmy przekształcenie $\xi': V \rightarrow V^*$ zdefiniowane jako $(\xi'(v))(w) = \xi(w, v)$. Udowodnij, że ξ' jest bijekcją oraz $\xi'(av + bw) = \bar{a}v + \bar{b}w$, czyli, że ξ' jest izomorfizmem $V \rightarrow V^*$, gdzie V^* jest przestrzenią V^* ze zmodyfikowaną operacją mnożenia: $(a \cdot f)(v) = \bar{a} \cdot f(v)$.
10. ($\star$) Udowodnij, że przy opisanym w poprzednim zadaniu utożsamieniu V i V^* , endomorfizmy $\phi: V \rightarrow V$ oraz $\Phi: V^* \rightarrow V^*$ są sprzężone wtedy i tylko wtedy, gdy $\xi(\phi(v), w) = \xi(v, \Phi(w))$ dla dowolnych $v, w \in V$.