Matematyczna wieża Babel.
5. Geometria i aksjomaty
materiały do ćwiczeń

Projekt „Matematyka dla ciekawych świata”
spisał: Michał Korch

9 maja 2019

1 Geometria i postulaty Euklidesa

Jak wiecie Euklides w swoim niesamowicie doskonałym dziele „Elementy” zaproponował pięć aksjomatów geometrii

1. Dowolne dwa punkty można połączyć prostą.
2. Dowolną prostą można przedłużyć nieograniczenie.
3. Dla danego odcinka można zaznaczyć okrąg o środku w dowolnym punkcie i promieniu równym odcinkowi.
4. Wszystkie kąty proste są równe.
5. Dwie proste, które przecinają trzecią w taki sposób, że suma kątów wewnętrznych po jednej stronie jest mniejsza od dwóch kątów prostych, przetną się i to właśnie z tej właśnie strony, jeśli się je odpowiednio przedłuży.

Następnie udowodnił mnóstwo, nie zawsze prostych, faktów geometrycznych.

Jednym z podstawowych problemów geometrycznych rozważanych przez Euklidesa i innych uczonych starożytności była możliwość konstrukcji różnych obiektów geometrycznych używając tylko cyrkla i linijki. Spróbujmy także wymyślić tego rodzaju konstrukcje.

Zadanie 1

Macie dany odcinek. Korzystając tylko z cyrkla i linijki znajdź środek odcinka, oraz skonstruuj (narysuj) kwadrat, którego dany odcinek jest bokiem.

Zadanie 2

Jak wiecie, twierdzenie Pitagorasa mówi, że jeśli a, b to długości przyprostokątnych w trójkącie prostokątnym, a c to przeciwprostokątna, to $c^2 = a^2 + b^2$. Euklides sformułował bardzo ładny dowód tego twierdzenie w „Elementach”, choć w zasadzie dowodów można sformułować wiele. Spróbujcie „własnoręcznie” udowodnić twierdzenie Pitagorasa.

Wskazówka: Wskazówki do tego zadania znajdziecie na końcu skryptu.

Zadanie 3

Niech będzie dany trójkąt prostokątny ABC o przeciwprostokątnej AB. Wysokość z wierzchołka C pada na podstawę AB w punkcie H. Udowodnijcie, że $|CH| = \sqrt{|AH||BH|}$.

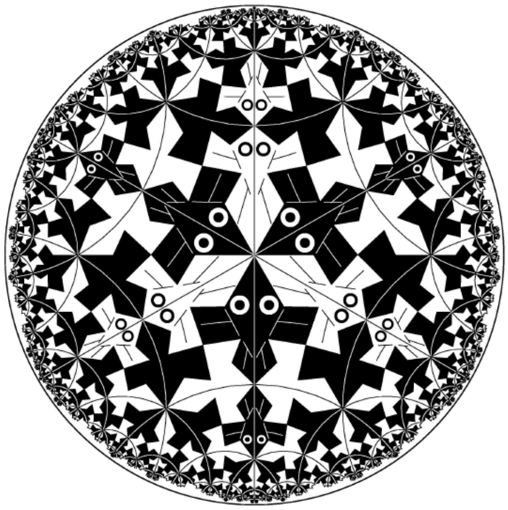
Wskazówka: Wskazówki do tego zadania znajdziecie na końcu skryptu.

Geometrie nieeuklidesowe

Gdy odrzucimy ostatni (lub nawet nie tylko) ten aksjomat Euklidesa, dostaniemy nowe geometryczne „światy”.

Każdy z tych „światów” możemy wyobrazić sobie wewnątrz zwyczajnego euklidesowego świata, nieco zmieniając znaczenie takich słów jak prosta, odległość itp. W skrócie:

1. Geometria euklidesowa:
    - przez punkt poza daną prostą można poprowadzić dokładnie jedną prostą równoległą do niej,
    - suma kątów w każdym trójkącie wynosi 180°.
2. Geometria hiperboliczna:
    - przez punkt poza daną prostą można poprowadzić wiele prostych równoległych do niej,
    - suma kątów w każdym trójkącie jest mniejsza niż 180° i im trójkąt jest większy tym bardziej.
    - modele (należy o nich myśleć, jak o mapach kuli ziemskiej – każda mapa idzie na kompromis i pewne cechy, np. kąty odwzorowuje dobrze, a inne, np. pola źle):
        - Model Poincarégo
            * cała płaszczyzna mieści się w kole bez brzegu,
            * proste to średnice (bez końców) oraz łuki okręgów obustronnie prostopadłych do brzegu (mówimy, że okręgi są prostopadłe, jeśli prostopadłe są proste styczne do nich w tym punkcie)
            * model ten zachowuje kąty, ale oczywiście nie zachowuje odległości i pól (rzeczy się „zagęszczają” im bliżej są brzegu), co dobrze odwzorowuje rysunek Eschera (wszystkie kształty na tym rysunku takie same i takiej samej wielkości (przystające) w tej geometrii)



- Model Kleina
  - cała płaszczyzna, jak wyżej, mieści się w kole bez brzegu,
  - proste to cięciwy tego koła (bez końców),
  - relatywnie łatwo policzyć odległość pomiędzy punktami w tym modelu, używając standardowej linijki. Jeśli chcemy policzyć odległość między punktami A i B prowadzimy prostą (cięciwę) je łączącą. Punkty przecięcia tej cięciwy z okręgiem będącym brzegiem modelu niech będą P i Q, a kolejność punktów na cięciwie to P, A, B, Q. Mierzymy euklidesowe odległości PA, BQ, PB, AQ. Wtedy odległość między A i B w sensie geometrii hiperbolicznej, to:

$$\ln \frac{|PB||AQ|}{|PA||BQ|},$$

    gdzie ln to pewna funkcja matematyczna (nosząca nazwę logarytmu naturalnego) – znajdziesz ją na każdym standardowym kalkulatorze,
  - ten model nie zachowuje kątów, ani pól.

3. Geometria sferyczna

- proste (najkrótsze drogi między punktami) na sferze to wielkie okręgi, czyli okręgi o środku w środku sfery, np. równik i południki, ale już nie równoleżniki,
- każde dwie proste się przecinają, czyli nie ma prostych równoległych,
- suma kątów w każdym trójkącie jest większa niż 180°,
- są takie pary punktów (przeciwległe, zwane też antypodycznymi), przez które można poprowadzić wiele prostych.

4. Geometria eliptyczna (płaszczyzna rzutowa) – model na połówce sfery.

- Patrzymy na geometrię sferyczną na połówce sfery, z tym że „sklejamy” przeciwległe punkty brzegu tej półsfery. W takim znaczeniu, że jeśli ktoś wyjdzie z jednej strony teleportuje się natychmiast i bez zauważenia tego faktu do przeciwległego punktu.
- Przez każde dwa punkty w takim razie można poprowadzić dokładnie jedną prostą,
- Nadal nie ma prostych równoległych, a suma kątów w każdym trójkącie jest większa niż 180°.

Zadanie 4

Na płaszczyźnie euklidesowej narysowano trójkąt. Rozstrzygnij, jaki ma on kształt, jeśli:

a) jeden z jego kątów jest równy sumie dwóch pozostałych?

b) jeden z jego kątów jest mniejszy niż suma dwóch pozostałych?

c) jeden z jego kątów jest większy niż suma dwóch pozostałych?

Wskazówka: Wskazówki do tego zadania znajdziecie na końcu skryptu.

Zadanie 5

A co można powiedzieć o sumie kątów w dowolnym czworokącie (a co o sumie kątów w dowolnym pięciokącie? sześciokącie?) narysowanym w:

a) geometrii euklidesowej?

b) geometrii hiperbolicznej? geometrii na sferze?

Odpowiedzi uzasadnij!

Wskazówka: Wskazówki do tego zadania znajdziecie na końcu skryptu.

Zadanie 6

W geometrii sferycznej poprowadzono trzy proste, które nie przecinają się w jednym punkcie. Na ile i jakich kształtów dzielą one całą sferę?

2 Aksjomaty arytmetyki

Ważne będą dla nas aksjomaty arytmetyki na liczbach naturalnych. Te aksjomaty sformułował Peano i są one następujące (opisują 0, operacje + oraz · i operację nast, którą należy rozumieć jako +1, używają także stałej 0):

1. dla każdego n, nie jest prawdą, że $\mathrm{nast}(n) = 0$,
2. dla każdych n, m, jeśli $\mathrm{nast}(n) = \mathrm{nast}(m)$, to $n = m$,
3. dla każdego n, $n + 0 = n$,
4. dla każdych n, m, $\mathrm{nast}(n + m) = n + \mathrm{nast}(m)$,
5. dla każdego n, $n \cdot 0 = 0$,
6. dla każdych n, m, $n \cdot \mathrm{nast}(m) = n \cdot m + n$

I jest jeszcze jeden kluczowy aksjomat (tak naprawdę „schemat aksjomatów”) zwany indukcją matematyczną.

O co chodzi? O bardzo prosty i bardzo silny model wnioskowania. Jeśli mamy ciąg kilku baterii (ustawionych od lewej do prawej) ustawionych za sobą i wiemy dwie rzeczy:

- pierwsza z nich po lewej ma minus,
- każda kolejna jest ustawiona dobrze, czyli kolejna bateria ma po lewej stronie znak przeciwny do znaku poprzedniej baterii z prawej strony,

to od razu wiemy, że wszystkie baterie w ciągu po lewej stronie mają minus. Oczywiste, nie? Te dwa elementy wiedzy nazywamy pierwszym i drugim krokiem indukcyjnym.

Jak zasadę indukcji sformułować ogólnie? Mamy daną jakąś tezę zależną od liczby n (w przykładzie będzie to: n-ta bateria ma po lewej stronie minus) i chcemy udowodnić, że zachodzi dla każdej liczby naturalnej n. Zasada indukcji mówi, że wystarczy, że pokażemy, że prawdziwe są dwa fakty:

- teza jest prawdziwa dla $n = 0$ (pierwszy krok)
- prawdziwa jest następująca implikacja: jeśli teza jest prawdziwa dla $n = k$, to jest też prawdziwa dla $n = k + 1$ (krok indukcyjny).

Inaczej mówiąc do naszego zbioru aksjomatów dodajemy dla każdego zdania logicznego $\varphi(n)$ (zależnego od liczby n) następujący aksjomat:

7. Jeśli $\varphi(0)$ oraz dla każdego k, z tego że $\varphi(k)$ wynika, że $\varphi(\mathrm{nast}(k))$, to dla każdego n, zachodzi $\varphi(n)$.

Spróbujmy zatem pokazać jakiś prosty fakt dotyczący arytmetyki, korzystając tylko i wyłącznie z aksjomatów Peano. Na przykład udowodnijmy, że dla każdej liczby naturalnej n, $n = 0 + n$ (zauważcie, że to nie to samo, co aksjomat trzeci, bo przecież nie udowodniliśmy, że dodawanie jest przemienne!).

Skorzystamy z indukcji matematycznej:

- teza dla $n = 0$ brzmi $0 = 0 + 0$ i jest prawdziwa na podstawie aksjomatu trzeciego.
- udowodnijmy teraz, że z tego, że zachodzi $k = 0 + k$ wynika, że zachodzi $\mathrm{nast}(k) = 0 + \mathrm{nast}(k)$. Załóżmy zatem, że dla pewnego k, mamy $k = 0 + k$. Wtedy $\mathrm{nast}(k) = \mathrm{nast}(0 + k)$, co z aksjomatu czwartego jest równe $0 + \mathrm{nast}(k)$, co kończy dowód kroku indukcyjnego.

I na mocy aksjomatu indukcji kończy dowód tego, że dla każdej liczby naturalnej n, $n = 0 + n$.

Zadanie 7

Udowodnij, korzystając tylko z aksjomatów Peano, ża dla każdych liczb naturalnych m, n, mamy $\mathrm{nast}(m) + n = \mathrm{nast}(m + n)$.

Wskazówka: Niech m będzie ustaloną liczbą przez cały dowód. Rozpatrz przez indukcję tezę dla n, że $nast(m) + n = nast(m + n)$.

Zadanie 8

Udowodnij, korzystając jedynie z aksjomatów Peano oraz dwóch do tej pory udowodnionych faktów, że dodawanie liczb naturalnych jest przemienne.

Zadanie 9

Udowodnij, korzystając jedynie z aksjomatów Peano, że dodawanie liczb naturalnych jest łączne (dla każdych liczb naturalnych p, q, r, $p + (q + r) = (p + q) + r$).

3 Aksjomaty podstaw matematyki

Matematykę i jej pojęcia (liczby, funkcje, przestrzenie...) można zbudować wychodząc od pierwotnego pojęcia, jakim jest zbiór. Dlatego aksjomaty opisujące właśnie zbiory (sformułowane przez E. Zermela i A. Fraenkela) możemy uznać, za aksjomaty stojące u podstawy matematyki. Chcieliśmy zatem przybliżyć Wam chociaż część z nich – skoro już o aksjomatach rozmawiamy.

Jednak uwaga na początek: w tym rozdziale (a nawet bardziej ogólnie jak się okaże) wszystko jest zbiorem. W szczególności elementu zbioru to też pewne zbiory – i tak czasem warto o nich myśleć. Oznaczenie $a \in b$ oznacza, że a jest elementem zbioru b.

0. Aksjomat zbioru pustego. Istnieje zbiór (zwany zbiorem pustym i oznaczany $\varnothing$), który nie ma żadnego elementu (dla każdego x, $x \notin \varnothing$).

1. Aksjomat ekstencjonalności. Dwa zbiory są równe wtedy i tylko wtedy, gdy mają dokładnie te same elementy ($A = B$ wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego x, $x \in A$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \in B$).

2. Aksjomat pary. Dla każdych a, b istnieje zbiór, do którego należy a i b, a nie należy nic innego (zbiór ten oznaczamy $\{a, b\}$).

Zatrzymajmy się na chwilę, aby pokazać, że dla każdego a istnieje zbiór, do którego należy tylko a i nic więcej (nazywany singletonem a i oznaczany $\{a\}$). Rzeczywiście, trzeba zastosować aksjomat pary dla $a = b$ i już!

Zauważcie też, że dla każdych a, b, $\{a, b\} = \{b, a\}$ (na podstawie aksjomatu ekstencjonalności). Ale możemy zdefiniować specjalny zbiór zwany parą uporządkowaną, który „pamięta", co jest pierwsze. Dla dowolnych a, b niech $\langle a, b\rangle = \{a, \{a, b\}\}$ (czyli para z dwoma elementami: a oraz parą $\{a, b\}$).

Zadanie 10

Udowodnij, że dla dowolnych a, b, c, d zachodzi $\langle a, b\rangle = \langle c, d\rangle$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a = c$ oraz $b = d$.

Dodajmy jeszcze jeden aksjomat. A właściwie tzw. schemat aksjomatów. Dla każdego zdania $\varphi(x)$ (np. $\varphi(x)$ to może być zdanie „x jest niepusty", albo „x ma parzystą liczbę elementów", etc.) dodajmy aksjomat:

3. Schemat aksjomatu wyróżniania. Dla każdego zbioru istnieje zbiór złożony z tych jego elementów x, które spełniają zdanie $\varphi(x)$.

Ten aksjomat jest bardzo precyzyjnie dobrany. Istnieje bowiem pokusa, aby go trochę uogólnić pisząc, że dla każdego zdania $\varphi(x)$ istnieje zbiór złożony z wszystkich x, które spełniają $\varphi(x)$ (czyli nie ograniczać się tylko do elementów pewnego zbioru). Okazuje się jednak, że takie zdanie jest fałszywe!

Zadanie 11

Udowodnijcie, że teza, że dla każdego zdania $\varphi(x)$ istnieje zbiór złożony z wszystkich x, które spełniają $\varphi(x)$, jest fałszywa.

Wskazówka: Rozpatrzcie zdanie „$x \notin x$".

Rozważmy zatem jeszcze jeden aksjomat.

4. Aksjomat nieskończoności. Istnieje zbiór X taki, że $\varnothing \in X$ oraz jeśli $x \in X$, to również zbiór, którego elementami są dokładnie wszystkich elementy x oraz sam x jest elementem X. Inaczej mówiąc istnieje zbiór o nieskończonej liczbie elementów.

Zastanówmy się przez chwilę dlaczego ten zbiór X rzeczywiście ma nieskończenie wiele elementów. Na pewno ma jeden element $\varnothing$. Skoro $\varnothing \in X$, to również zbiór, którego elementy to elementy zbioru pustego (nie ma) oraz sam zbiór pusty (dostajemy więc zbiór, którego jedynym elementem jest zbiór pusty, czyli $\{\varnothing\}$) jest w tym zbiorze. Skoro jednak $\{\varnothing\} \in X$, elementy to elementy $\{\varnothing\}$ (czyli $\varnothing$) oraz sam $\{\varnothing\}$ (dostajemy więc zbiór dwuelementowy: $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$) jest w tym zbiorze. I tak dalej. Tak się składa, że matematycy dokładnie tak, posługując się zbiorami definiują kolejne liczby naturalne:

- $0 = \varnothing$,
- $1 = \{\varnothing\}$,
- $2 = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$,
- ...

Zadanie 12

Wypiszcie zgodnie z tą zasadą liczby 3 i 4!

Aksjomatów teorii zbiorów jest dużo więcej – jeśli chcesz poznać wszystkie wyszukaj w Internecie aksjomatów ZFC.

4 Zadania dodatkowe

Zadanie 13

Kolejnym znanym twierdzeniem, którego dowód można znaleźć w „Elementach" Euklidesa to twierdzenie o kątach w okręgu. Niech będzie dany okrąg i jego łuk. Każdy kąt wpisany w okrąg oparty na tym łuku ma tę samą miarę i jest ona równa mierze kąta pomiędzy cięciwą tego łuku a styczną (tzw. kąt dopisany). Udowodnijcie to twierdzenie.

Wskazówka: Wskazówki do tego zadania znajdziecie na końcu skryptu.

Zadanie 14

Dany jest trójkąt ostrokątny ABC, taki że kąt przy wierzchołku C wynosi $60°$. Punkty D i E są rzutami prostokątnymi odpowiednio punktów A i B na proste BC i AC. Punkt M jest środkiem boku AB. Wykaż, że trójkąt DEM jest równoboczny.

Wskazówka: Wskazówki do tego zadania znajdziecie na końcu skryptu.

Zadanie 15

Rozstrzygnij, czy na sferze można narysować prostokąt (czworokąt o 4 kątach prostych). A czy istnieje jakikolwiek prostokąt w geometrii hiperbolicznej? Odpowiedzi uzasadnij.

Zadanie 16

Z płaszczyzny rzutowej wycięto koło. Co można powiedzieć o pozostałym fragmencie? Czy da się go sensownie narysować (tak, żeby nie trzeba było pamiętać, że coś z czymś jest sklejone)?

Wskazówka: Wskazówki do tego zadania znajdziecie na końcu skryptu.

Zadanie 17

Udowodnij, korzystając jedynie z aksjomatów Peano oraz tezy udowodnionej w zadaniu 9 (łączność dodawania), że dodawanie liczb naturalnych jest rozdzielne względem mnożenia (dla każdych liczb naturalnych p, q, r, $(p \cdot (q + r) = (p \cdot q) + (p \cdot r))$.

Zadanie 18

Wskaż wszystkie elementy oraz wszystkie podzbiory zbioru $\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$.
Wskazówka: Podzbiorów jest osiem. Dlaczego?

5 Zadania domowe

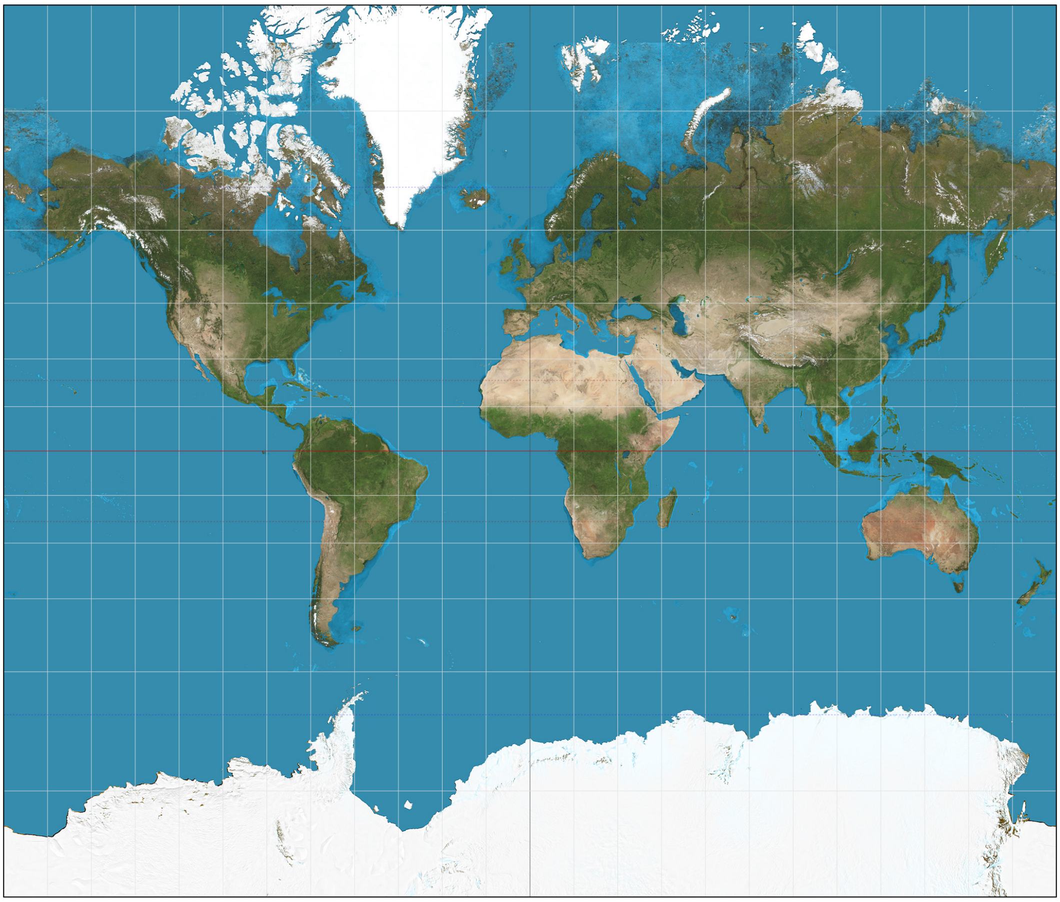
Zadanie 19 (za 2 punkty)

Niech będzie dany prostokąt. Skonstruuj cyrklem i linijką kwadrat o polu równym polu tego prostokąta.

Wskazówka: Wskazówki do tego zadania znajdziecie na końcu skryptu.

Zadanie 20 (za 1 punkt)

Na poniższej mapie (odwzorowanie Merkatora) zaznacz najkrótszą trasę pomiędzy Warszawą i Tokio oraz pomiędzy Warszawą a Buenos Aires. Do jej znalezienia możesz użyć globusu i nitki, albo skorzystać z darmowego programu Google Earth (w którym można zobaczyć kulę ziemską oraz wyznaczać proste). Znajdź kąty pomiędzy znalezioną trasą a kierunkiem północnym wyznaczanym przez kolejne zaznaczone na mapie południki. Co zaobserwowałaś/eś?



Zadanie 21 (3 punkty)

Udowodnij, korzystając jedynie z aksjomatów Peano oraz przemienności dodawania, którą udowodniliśmy w zadaniu 8, oraz łączności dodawania (patrz zadanie 9), że mnożenie liczb naturalnych jest przemienne (dla każdych liczb naturalnych n, m, $(m \cdot n = n \cdot m)$.
Wskazówka: Postępuj podobnie jak przy dowodzeniu przemienności dodawania – zanim zabierzesz się za właściwy dowód udowodnij dla mnożenia fakty podobne do tych, które dla dodawania zostały udowodnione na początku rozdziału trzeciego oraz w zadaniu siódmym.

6 Wskazówki do zadań

Zadanie 2

Wskazówka:

1. *Niech nasz trójkąt prostokątny to trójkąt ABC, gdzie kąt prosty jest przy wierzchołku C.*
2. *Narysujcie kwadraty na każdym boku: $BCDE$, $CAHI$ oraz $ABFG$.*
3. *Niech CJ będzie wysokością trójkąta. Przedłuż ją do przecięcia z odcinkiem FG. Niech to przecięcie to K.*
4. *Zauważ, że pole trójkąta AHC jest takie same jak pole trójkąta AHB oraz pole trójkąta AGC jest takie same jak pole trójkąta AGJ. Dlaczego?*

5. *Co w takim razie można powiedzieć o polu kwadratu $CAHI$ i prostokąta $AGKJ$?*
6. *Co można powiedzieć o polu kwadratu $BCDE$ i prostokąta $BFKJ$?*

Zadanie 3

Wskazówka: Skorzystajcie trzy razy z tw. Pitagorasa.

Zadanie 4

Wskazówka: W geometrii euklidesowej suma kątów w trójkącie to $180°$.

Zadanie 5

Wskazówka: Użyjcie trójkątów

Zadanie 13

Wskazówka: Dorysujcie odcinek między środkiem okręgu, a wierzchołkiem kąta i rozważcie kąty w powstałych trójkątach.

Zadanie 14

Wskazówka: Oblicz kąt CAD lub CBE, a następnie przyjrzyj się czworokątowi $ABED$. Czy można na nim opisać okrąg?

Zadanie 16

Wskazówka: Ustaw tak to koło, które wycinamy, aby przechodziło przez brzeg półsfery.

Zadanie 19

Wskazówka: Skorzystaj z zadania 3.