

Geometria z algebrą liniową II, 2020/2021

ćwiczenia 22. – ze wskazówkami

21 maja 2021

1. Znaleźć rzut prostopadły punktu $p = (1, 2, 1) \in \mathbb{R}^3$:
 - a) na płaszczyznę M opisaną równaniem $2x + 3y - z = 2$,
 - b) na prostą $L = (3, 2, -1) + \text{lin}((1, -1, 1))$
2. (·) Znaleźć układ równań i parametryzację hiperpłaszczyzny przechodzącej przez punkt $(3, 2, 1, -1)$ i prostopadłej do hiperpłaszczyzny zadanej układem równań:

$$\begin{cases} a + b + c + d = -9 \\ a - b + c + 2d = -4 \end{cases}$$

3. Znaleźć rzut prostopadły punktu $p = (2, 3, 1) \in \mathbb{R}^3$:
 - a) na płaszczyznę M opisaną równaniem $x - 2y + z = 2$,
 - b) na prostą $L = (-1, 1, 0) + \text{lin}((1, 0, 1))$
4. Znaleźć układ równań opisujący oraz parametryzację:
 - a) prostej $L \subseteq \mathbb{R}^3$ przechodzącej przez punkt $(2, 1, 1)$ i prostopadłej do płaszczyzny opisanej równaniem $3x - y + 2z = 6$,
 - b) płaszczyzny $M \subseteq \mathbb{R}^3$ przechodzącej przez punkt $(3, 0, 5)$ i prostopadłej do prostej $(1, 1, 1) + \text{lin}((2, -1, 1))$.
5. (·) W $\mathbb{R}^4$ ze standardowym iloczynem skalarnym znaleźć
 - a) rzut prostopadły punktu $p = (2, 1, 1, 2)$ na przestrzeń $H : x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 5$,
 - b) obraz punktu p w symetrii prostopadłej względem przestrzeni $H = (0, 1, 1, 0) + \text{lin}((2, 1, 0, 1), (1, 0, 0, 1))$.
6. W $\mathbb{R}^4$ ze standardowym iloczynem skalarnym znaleźć wzór na przekształcenie $\mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ będące:
 - a) rzutem prostopadłym na $H : x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 3$,
 - b) symetrią prostopadłą względem H .
7. Znajdź równanie opisujące płaszczyznę symetryczną do płaszczyzny $Q : x_1 + x_2 + x_3 = 3$ względem płaszczyzny $P : x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 6$.
8. Znajdź odległość punktu $q = (1, 2, 1, 0)$ od przestrzeni $H : x_1 - 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 6$
 - a) w $\mathbb{R}^4$ ze standardowym iloczynem skalarnym,
 - b) w $\mathbb{R}^4$ z iloczynem skalarnym zadany wzorem
9. W $\mathbb{R}^2$ ze standardowym iloczynem skalarnym znajdź na paraboli $y^2 = x$ punkt leżący najbliżej prostej $\text{af}((-1, 0), (0, 2))$.
10. (★) W przestrzeni wielomianów stopnia $\leq n$ nad $\mathbb{R}$ zadajemy

$$\langle w, v \rangle = \int_{-1}^1 w(x)v(x) dx.$$

Sprawdzić, że jest to iloczyn skalarny oraz spróbować znaleźć wzór na k -ty wektor w bazie powstałej z ortonormalizacji bazy $1, x, x^2, \dots$