

Geometria z algebrą liniową II, 2018/2019

ćwiczenia 18.

7 maja 2019

Zadania

1. (·) Sprawdź, czy przekształcenie $\varphi: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ takie, że

$$\varphi((x, y, z, t)) = (5x - 2y - 2z, -2x + 6y, -2x + 4z, 8t)$$

jest samosprężone w przestrzeni ze standardowym iloczynem skalarnym.

2. Dla przekształcenia z poprzedniego zadania znajdź w $\mathbb{R}^4$ taką bazę, która składa się z wektorów własnych tego przekształcenia i jest ortonormalna względem standardowego iloczynu skalarnego.
3. (·) Dla każdej z poniższych macierzy $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ znaleźć taką macierz ortogonalną C , że macierz $C^T A C$ jest diagonalna.

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

4. Niech φ będzie endomorfizmem samosprężonym przestrzeni skończonego wymiaru. Pokazać, że $\ker \varphi \perp \operatorname{im} \varphi$, oraz, że $\ker \varphi$ oraz $\operatorname{im} \varphi$ rozpinają całą przestrzeń.

5. Niech $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ oraz $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

- a) Sprawdź, czy macierze A, B są diagonalizowalne nad $\mathbb{R}$ i nad $\mathbb{C}$,
- b) Sprawdź, dla jakich $k \in \mathbb{N}$ istnieje macierz $C \in M_{4 \times 4}(\mathbb{C})$ taka, że $C^k = B$,
- c) Czy zbiór $\{A^n : n \in \mathbb{N}\}$ jest skończony? Jeśli tak, to ile ma elementów?
6. Niech $a_1, \dots, a_k$ będą parami różnymi wartościami własnymi endomorfizmu $\phi: V \rightarrow V$, gdzie V ma skończony wymiar. Załóżmy, że $\beta_i \in V_{(a_i)}$, dla $i = 1, \dots, k$ są takimi wektorami, że $\beta_1 + \dots + \beta_k = 0$. Pokazać, że $\beta_i = 0$ dla każdego $i = 1, \dots, k$.

7. Rozwiąż poniższe krótkie problemy.

- a) Załóżmy, że α, β, γ są wektorami własnymi endomorfizmu $\varphi: \mathbb{R}^8 \rightarrow \mathbb{R}^8$ o wartościach własnych odpowiednio 2, 3, 6. Czy może zachodzić równość $\gamma = 3\alpha + 2\beta$?
- b) Ile jest klas podobieństwa macierzy $M_{4 \times 4}(\mathbb{C})$ o wielomianie charakterystycznym $(1-\lambda)^3(c-\lambda)$, gdzie $c \neq 1$.
- c) Macierz $A \in M_{7 \times 7}(\mathbb{R})$ jest diagonalizowalna. Jej wszystkimi wartościami są $-2, -1, 1, 2$. Jaki jest wymiar $\dim V_{(2)}$, jeśli $\dim V_{(-2)} = 1$, $\dim V_{(-1)} = 2$ oraz $\dim V_{(1)} = 2$?
- d) Czy istnieje macierz nieosobliwa $A \in M_{3 \times 3}(\mathbb{Q})$, że (A^2, A, I, A^{-1}) jest liniowo niezależnym układem wektorów w $M_{3 \times 3}(\mathbb{Q})$.
- e) Załóżmy, że H jest przestrzenią afiniczną oraz $(p_0, \dots, p_k)$ jest afinicznie niezależnym układem punktów w H . Czy może istnieć taki nienależący do $\operatorname{af}(p_0, \dots, p_k)$ punkt $q \in H$, że układ $(p_0, \dots, p_k, q)$ jest afinicznie zależny?

- f) Niech $X \neq \emptyset$ będzie takim podzbiorem przestrzeni afinicznej H nad ciałem liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$, że

$$\{x = tp + (1-t)q : t \in \mathbb{R}, t \geq 0\} \subseteq X$$

dla każdych $p, q \in X$. Czy prawdą jest, że X jest podprzestrzenią afiniczną H ?

- g) Jaka jest najmniejsza liczba naturalna k taka, że dla każdych: prostej $L \subseteq \mathbb{R}^9$ i płaszczyzny $P \subseteq \mathbb{R}^9$ istnieje podprzestrzeń afiniczna $H \subseteq \mathbb{R}^9$ wymiaru k zawierająca $L \cup P$.
- h) Niech $f: H \rightarrow M$ będzie przekształceniem afinicznym, gdzie H jest przestrzenią afiniczną nad $\mathbb{R}$ i niech $p, q \in H$ będą różnymi punktami. Czy układ $(f(p), f(q), f(2p-q))$ może być układem afinicznie niezależnym?
- i) Niech H będzie przestrzenią afiniczną wymiaru 3 i niech $f: H \rightarrow H$ będzie funkcją taką, że jej obcięcie $f|_M: M \rightarrow H$ do każdej właściwej podprzestrzeni afinicznej $M \subseteq H$ jest przekształceniem afinicznym. Czy prawdą jest, że f jest przekształceniem afinicznym?
8. (★) Niech V będzie $n \geq 1$ wymiarową przestrzenią nad $\mathbb{R}$ oraz niech $\phi: V \rightarrow V$ będzie endomorfizmem.
- a) Udowodnij, że istnieje ϕ -niezmiennicza podprzestrzeń $V_0 \subseteq V$ wymiaru 1 lub 2.
Jeśli ϕ ma rzeczywistą wartość własną a , to niech v będzie wektorem własnym dla tej wartości własnej. Wtedy $V_0 = \operatorname{lin}(v)$.
- b) Udowodnij, że jeśli ϕ ma rzeczywistą wartość własną, to istnieje ϕ -niezmiennicza podprzestrzeń $V_0 \subseteq V$ wymiaru $n-1$.