

Geometria z algebrą liniową II, 2018/2019

ćwiczenia 16.

26 kwietnia 2019

Zadania

1. (·) Udowodnij, że jeśli przekształcenie liniowe pomiędzy przestrzeniami euklidesowymi zachowuje iloczyn skalarny, to jest monomorfizmem.
2. Sprawdź, czy przekształcenie $\varphi: V_1 \rightarrow V_2$, gdzie $V_1 = \langle \mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle_1 \rangle$,

$$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle_1 = 10x_1y_1 + 14x_1y_2 + 14x_2y_1 + 20x_2y_2$$

natomiast V_2 to $\mathbb{R}^2$ ze standardowym iloczynem skalarnym, zadane wzorem $\varphi((x, y)) = (x + 2y, 3x + 4y)$ jest izometrią.

3. Sprawdź czy macierze

$$\begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

są ortogonalne.

4. Niech V będzie przestrzenią $\mathbb{R}^2$ ze standardowym iloczynem skalarnym oraz $\varphi: V \rightarrow V$ będzie zadane wzorem $\varphi((x, y)) = (x, -x + y)$. Sprawdź czy φ jest izometrią badając odpowiednią macierz.
5. (·) Niech K będzie ciałem o charakterystyce większej niż 2. Znajdź izometrię pomiędzy K^2 ze standardowym iloczynem skalarnym oraz $\langle K^2, \langle \cdot, \cdot \rangle_2 \rangle$, gdzie

$$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle_2 = x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_1y_2 + x_2y_1.$$

6. Udowodnić, że każda rzeczywista wartość własna dowolnej macierzy ortogonalnej jest równa 1 lub -1 .
7. Udowodnić, że każdy zespolony pierwiastek wielomianu charakterystycznego macierzy ortogonalnej ma moduł równy 1.
8. Udowodnij, że każda izometria 2-wymiarowej przestrzeni euklidesowej jest albo obrotem, albo symetrią prostopadłą.
9. Udowodnić, że jeśli $A, B \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ są macierzami ortogonalnymi o wyznaczniku 1, to $AB = BA$. Wykaż, że nie jest to prawdą dla macierzy $n \times n$, $n > 2$.
10. (★) Udowodnij, że każda izometria n -wymiarowej przestrzeni euklidesowej jest złożeniem k symetrii prostopadłych względem pewnych $n - 1$ wymiarowych podprzestrzeni dla pewnego $k \leq n$.

Praca domowa – seria 4

1. Znajdź wzór przekształcenia $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ będącego symetrią względem

$$H = (1, 0, 0, 0) + \text{lin}((0, 0, 1, 0), (-1, 0, 0, 1))$$

wzdłuż

$$M = \text{af}((1, 0, 1, 1), (1, 1, 1, 1), (2, 0, 1, 3)).$$

2. Niech $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ będzie jednokładnością o skali 3 i środku w $(0, 1, 0, 0)$, $h: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ niech będzie przesunięciem o wektor $(0, 0, -1, 0)$ oraz f niech będzie jak w poprzednim zadaniu. Znajdź wzór na przekształcenie $g \circ h \circ f \circ h$.
3. W $\mathbb{R}^3$ ze standardowym iloczynem skalarnym oblicz objętość, pole powierzchni poszczególnych ścian oraz miarę ich kątów w

$$S\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{4}\right), \left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\sqrt{3} - \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{4}, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right), \left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right)\right).$$

4. Udowodnij, że dla dowolnych wektorów u, v, w w trójwymiarowej zorientowanej przestrzeni euklidesowej zachodzi

$$\langle u \times v, w \rangle = \langle u, v \times w \rangle.$$

5. Udowodnij, że jeśli $M_{n \times n}(K)$ jest macierzą nad ciałem K o wyrazach będących jedynie zerami i jedynkami taką, że w każdym wierszu oraz w każdej kolumnie jest dokładnie jedna jedynka, to M jest macierzą ortogonalną.