

Geometria z algebrą liniową II, 2020/2021

ćwiczenia 16. – szkice rozwiązań

27 kwietnia 2021

1. $(\cdot)$ Sprawdź, czy przekształcenie $\varphi: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ takie, że

$$\varphi((x, y, z, t)) = (5x - 2y - 2z, -2x + 6y, -2x + 4z, 8t)$$

jest samosprężone w przestrzeni ze standardowym iloczynem skalarnym.

Sprawdzamy

$$\langle (x, y, z, t), (5x' - 2y' - 2z', -2x' + 6y', -2x' + 4z', 8t') \rangle = 5xx' - 2xy' - 2xz' - 2yx' + 6yy' - 2zx' + 4zz' + 8tt',$$

$$\langle (5x - 2y - 2z, -2x + 6y, -2x + 4z, 8t), (x', y', z', t') \rangle = 5xx' - 2yx' - 2zx' - 2xy' + 6yy' - 2xz' + 4zz' + 8tt',$$

co jest sobie równe.

2. Dla przekształcenia z poprzedniego zadania znajdź w $\mathbb{R}^4$ taką bazę, która składa się z wektorów własnych tego przekształcenia i jest ortonormalna względem standardowego iloczynu skalarnego.

Wielomian charakterystyczny to $-(\lambda - 2)(\lambda - 5)(\lambda - 8)^2$.

Przestrzenie własne dla tych wartości to odpowiednio $\text{lin}((2, 1, 2, 0))$, $\text{lin}((1, 2, -2, 0))$ oraz

$$\text{lin}((2, -2, -1, 0), (0, 0, 0, 1)),$$

co daje bazę ortonormalną złożoną z wektorów własnych

$$\mathcal{A} = \{(2, 1, 2, 0)/\sqrt{5}, (1, 2, -2, 0)/\sqrt{5}, (2, -2, -1, 0)/\sqrt{5}, (0, 0, 0, 1)\}.$$

3. Dla każdej z poniższych macierzy $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ znaleźć taką macierz ortogonalną C , że macierz $C^T A C$ jest diagonalna.

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix},$$

Wielomian charakterystyczny $(x - 5)(x - 1)$, więc przestrzenie własne to $\text{lin}((1, 1))$ oraz $\text{lin}((1, -1))$, zatem szukana macierz to

$$C = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{bmatrix},$$

Wielomian charakterystyczny $-(x - 6)^2(x - 3)$, więc przestrzenie własne to $\text{lin}((1, -1, 0), (1, 1, -2))$ (dobieram tak, żeby były prostopadłe) oraz $\text{lin}((1, 1, 1))$, zatem szukana macierz to

$$C = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Wielomian charakterystyczny $(x-1)^2(x+1)^2$, więc przestrzenie własne to $\text{lin}((1,0,0,1), (0,1,1,0))$ (dobieram tak, żeby były prostopadłe) oraz $\text{lin}((1,0,0,-1), (0,1,-1,0))$, zatem szukana macierz to

$$C = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

4. Niech φ będzie endomorfizmem samosprężonym przestrzeni skończonego wymiaru. Pokazać, że

$$\ker \varphi \perp \text{im} \varphi,$$

oraz, że $\ker \varphi$ oraz $\text{im} \varphi$ rozpinają całą przestrzeń.

Rzeczywiście, niech $v \in \ker \varphi$ oraz $w \in \text{im} \varphi$, zatem $w = \varphi(u)$. Wtedy

$$\langle v, w \rangle = \langle v, \varphi(u) \rangle = \langle \varphi(v), u \rangle = \langle 0, u \rangle = 0.$$

Reszta wynika zatem z rachunku na wymiarach.

5. $(\cdot)$ Dla formy dwuliniowej $h: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ zadanej wzorem

$$\begin{aligned} h((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) &= \\ &= x_1 y_1 - 2x_1 y_2 - 2x_2 y_1 + 2x_2 y_2 - 2x_2 y_3 - 2x_3 y_2 + 3x_3 y_3 \end{aligned}$$

znaleźć bazę $\mathbb{R}^3$, która jest ortogonalna względem h i ortonormalna względem standardowego iloczynu skalarnego.

Niech $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ będzie takie, że $M(\varphi)_{st}^{st} = G(h, st)$. Ale w takim razie macierz φ jest symetryczna – jest to więc przekształcenie samosprężone. Istnieje więc baza ortonormalna złożona z wektorów własnych i jeśli $A = M(id)_{\mathcal{A}}^{st}$, to $A^{-1} = A^T$. Zatem macierz $A^T G(h, st) A$ jest diagonalna, czyli baza $\mathcal{A}$ jest ortogonalna względem h . W takim razie trzeba znaleźć bazę wektorów własnych φ zdefiniowanego macierzą

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

$$w(\lambda) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 3\lambda - 10,$$

czyli wartości własne to $-1, 2$ i 5 , a wektory własne dla nich to odpowiednio: $(2, 2, 1)$, $(2, -1, -2)$ i $(1, -2, 2)$, zatem szukana baza to

$$\{(2, 2, 1)/3, (2, -1, -2)/3, (1, -2, 2)/3\}.$$

6. Dla jakich wartości parametrów $r, s \in \mathbb{R}$ forma dwuliniowa $q: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $h((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1 y_1 + r x_1 y_2 + r x_2 y_1 + 4x_2 y_2 + s x_3 y_3$ jest:

- dodatnio określona?
- dodatnio półokreślona?
- ujemnie określona?
- ujemnie półokreślona?
- nieokreślona?

Rozwiązanie:

$$\text{Macierz tej formy to: } A = \begin{bmatrix} 1 & r & 0 \\ r & 4 & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix}.$$

Wielomian charakterystyczny zatem to $(s - \lambda)((1 - \lambda)(4 - \lambda) - r^2)$, czyli wartości własne to

$$s, \frac{5 - \sqrt{9 + 4r^2}}{2}, \frac{5 + \sqrt{9 + 4r^2}}{2},$$

z czego ostatnia wartość jest zawsze dodatnia, zaś druga jest > 0 dla $r \in (-2, 2)$, $= 0$ dla $r = \pm 2$ i < 0 w przeciwnym przypadku, zatem nasza forma jest:

- dodatnio określona o ile $s > 0$ oraz $r \in (-2, 2)$,
- dodatnio półokreślona o ile $s \geq 0$ i $r \in [-2, 2]$,
- ujemnie określona – nigdy,
- ujemnie półokreślona – nigdy,
- nieokreślona – jeśli $s < 0$ lub $r \notin (-2, 2)$.

7. Niech $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ będzie macierzą symetryczną dodatnio półokreślona. Wykaż, że $\sqrt[n]{\det A} \leq \frac{\text{tr} A}{n}$.

Wiadomo, że ta macierz jest diagonalizowalna (czyli podobna do pewnej macierzy diagonalnej D o wyrazach na przekątnej d_i , $i = 0, \dots, n$) i $d_i \geq 0$. Zauważmy, że $\det A = \det D = d_1 \cdot \dots \cdot d_n$, oraz $\text{tr} A = \text{tr} D = d_1 + \dots + d_n$, zatem badana nierówność jest równoważna z nierównością między średnimi arytmetyczną i geometryczną.

8. (★) Niech $A = [a_{ij}]_{1 \leq i, j \leq n}$ będzie rzeczywistą macierzą. Wykaż nierówność Hadamarda, mianowicie, że

$$(\det A)^2 \leq \prod_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \right).$$

Zauważmy, że nierówność jest oczywista, jeśli $\det A = 0$, więc załóżmy, że kolumny macierzy A są liniowo niezależne.

Rozważmy najpierw macierz B o liniowo niezależnych kolumnach takich, że norma każdej z kolumn w sensie standardowego iloczynu skalarnego to 1 i niech $P = B^T B$. Wtedy na przekątnej macierzy P są same jedynki, a macierz P jest dodatnio określona macierzą symetryczną.

Z poprzedniego zadania mamy, że

$$\det P \leq \left(\frac{\text{tr} P}{n} \right)^n = \left(\frac{n}{n} \right)^n = 1,$$

a zatem $|\det B|^2 = \det P \leq 1$.

Niech teraz A będzie macierzą o liniowo niezależnych kolumnach. Dzieląc każdą z kolumn przez jej normę otrzymujemy macierz B o liniowo niezależnych kolumnach takich, że norma każdej z kolumn w sensie standardowego iloczynu skalarnego to 1. Wiem zatem, że $|\det B|^2 \leq 1$. Zauważmy, że $\sqrt{\prod_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \right)}$ to iloczyn norm kolumn macierzy A . Zatem

$$\det A = \sqrt{\prod_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \right)} \det B,$$

więc

$$(\det A)^2 = \left(\prod_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \right) \right) (\det B)^2 \leq \prod_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \right).$$

9. Dana jest sześcienna kostka o zbiorze ścian $X = \{x_1, \dots, x_6\}$. Niech na przestrzeni $V = F(X, \mathbb{R})$ będzie określony iloczyn skalarny

$$\langle f, g \rangle = \sum_{i=1}^6 f(x_i)g(x_i)$$

Niech $x^* \in X$ będzie ścianą przeciwną do x , a $N(x)$ zbiorem ścian sąsiadujących ze ścianą x . Niech

$$V_1 = \{f \in V : f \text{ jest stała}\},$$

$$V_2 = \{f \in V : \sum_{x \in X} f(x) = 0 \wedge \forall_{x \in X} f(x) = f(x^*)\}$$

oraz

$$V_3 = \{f \in V : \forall_{x \in X} f(x^*) = -f(x)\}.$$

Niech $L: V \rightarrow V$ będzie dane wzorem

$$(L(f))(x) = \frac{1}{4} \sum_{y \in N(x)} f(y)$$

Pokaż, że

a) przestrzenie V_1 , V_2 i V_3 są parami prostopadłe.

Rzeczywiście jeśli $f \in V_1, g \in V_2$, to

$$\langle f, g \rangle = a \sum_{x \in X} g(x) = 0,$$

gdzie f jest stałą funkcją równą a .

Jeśli $f \in V_2, g \in V_3$, to

$$\langle f, g \rangle = a(g(x_1) + g(x_1^*) + g(x_2) + g(x_2^*) + g(x_3) + g(x_3^*)) = a(0 + 0 + 0) = 0,$$

gdzie f jest stałą funkcją równą a , przy założeniu, że x_1, x_2, x_3 to ściany parami sąsiednie.

$f \in V_2, g \in V_3$, to

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle &= f(x_1)g(x_1) + f(x_1^*)g(x_1^*) + f(x_2)g(x_2) + f(x_2^*)g(x_2^*) + f(x_3)g(x_3) + f(x_3^*)g(x_3^*) = \\ &= f(x_1)g(x_1) - f(x_1)g(x_1) + f(x_2)g(x_2) - f(x_2)g(x_2) + f(x_3)g(x_3) - f(x_3)g(x_3) = 0, \end{aligned}$$

przy założeniu, że x_1, x_2, x_3 to ściany parami sąsiednie.

b) podprzestrzenie te są L -niezmiennicze.

Rzeczywiście, jeśli $f \in V_1$, $L(f) = f \in V_1$.

Jeśli $f \in V_2$, to zauważamy, że $\sum_{x \in X} (L(f))x = \frac{1}{4} \cdot 4 \cdot \sum_{x \in X} f(x) = 0$. Co więcej, skoro $N(x) = N(x^*)$, to $L(f)(x) = L(f)(x^*)$, a więc $f \in V_2$.

Jeśli $f \in V_3$, to $L(f)(x) = 0$, bowiem $N(x)$ składa się z parami przeciwległych ścian.

c) L jest samosprzężony. Wyznacz jego bazę ortonormalną złożoną z wektorów własnych.

Na potrzeby notacji w tym zadaniu założymy, że ściana $x_i^* = x_{i+3 \bmod 6}$, a funkcje $f \in L$ będziemy zapisywać jako wektor $\mathbb{R}^6$ podając $(f(x_1), f(x_2), f(x_3), f(x_4), f(x_5), f(x_6))$

Zauważmy, że $\dim V = 6$ oraz $\dim V_1 = 1$ (baza: $\{(1, 1, 1, 1, 1, 1)\}$), $\dim V_2 = 2$ (to przestrzeń rozwiązań układu 4 równań – równości na trzech parach przeciwległych ścian i suma to zero, więc baza to $\{(1, -1, 0, 1, -1, 0), (1, 0, -1, 1, 0, -1)\}$) oraz $\dim V_3 = 3$ (to przestrzeń rozwiązań układu trzech równań, baza $\{(1, 0, 0, -1, 0, 0), (0, 1, 0, 0, -1, 0), (0, 0, 1, 0, 0, -1)\}$), zatem $V = V_1 \oplus V_2 \oplus V_3$.

Wystarczy więc znaleźć wektory własne rozpinające każdą z tych niezmienniczych przestrzeni.

Mamy $L|_{V_1} = \text{id}_{V_1}$, więc $(1, 1, 1, 1, 1, 1)$ jest wektorem własnym.

Dla V_2 zauważmy, że

$$L((1, -1, 0, 1, -1, 0)) = (-1/2, 1/2, 0, -1/2, 1/2, 0) = \frac{1}{2}(1, -1, 0, 1, -1, 0),$$

$$L((1, 0, -1, 1, 0, -1)) = (-1/2, 0, 1/2, -1/2, 0, 1/2) = \frac{1}{2}(1, 0, -1, 1, 0, -1),$$

więc te wektory też są własne. Niestety nie są do siebie prostopadłe, więc musimy drugi z nich zortogonalizować:

$$(1, 0, -1, 1, 0, -1) - \frac{2}{4}(1, -1, 0, 1, -1, 0) = \frac{1}{2}(1, 1, -2, 1, 1, -2)$$

Ponieważ $V_3 \subseteq \ker L$, to dowolna baza prostopadła V_3 jest dobra, np:

$$\{(1, 0, 0, -1, 0, 0), (0, 1, 0, 0, -1, 0), (0, 0, 1, 0, 0, -1)\}.$$

Ostatecznie

$$\{(1, 1, 1, 1, 1, 1), (1, -1, 0, 1, -1, 0), (1, 1, -2, 1, 1, -2), (1, 0, 0, -1, 0, 0), (0, 1, 0, 0, -1, 0), (0, 0, 1, 0, 0, -1)\}$$

jest poszukiwaną bazą ortogonalną złożoną z wektorów własnych, którą jeszcze trzeba znormalizować do

$$\left\{ \frac{(1, 1, 1, 1, 1, 1)}{\sqrt{6}}, \frac{(1, -1, 0, 1, -1, 0)}{2}, \frac{(1, 1, -2, 1, 1, -2)}{2\sqrt{3}}, \frac{(1, 0, 0, -1, 0, 0)}{\sqrt{2}}, \frac{(0, 1, 0, 0, -1, 0)}{\sqrt{2}}, \frac{(0, 0, 1, 0, 0, -1)}{\sqrt{2}} \right\}$$

Jednocześnie istnienie takiej bazy dowodzi tego, że L jest przekształceniem samosprzężonym.