

Geometria z algebrą liniową II, 2020/2021

ćwiczenia 15.

23 kwietnia 2021

1. Niech V będzie przestrzenią $\mathbb{R}^2$ ze standardowym iloczynem skalarnym oraz $\varphi: V \rightarrow V$ będzie zadane wzorem $\varphi((x, y)) = (x, -x + y)$. Sprawdź czy φ jest izometrią badając odpowiednią macierz.
2. ($\cdot$) Niech K będzie ciałem o charakterystyce większej niż 2. Znajdź izometrię pomiędzy K^2 ze standardowym iloczynem skalarnym oraz $\langle K^2, \langle \cdot, \cdot \rangle_2 \rangle$, gdzie

$$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle_2 = x_1 y_1 + 2x_2 y_2 + x_1 y_2 + x_2 y_1.$$

3. ($\cdot$) Udowodnić, że każda rzeczywista wartość własna dowolnej macierzy ortogonalnej jest równa 1 lub -1 .
4. Udowodnić, że każdy zespolony pierwiastek wielomianu charakterystycznego macierzy ortogonalnej ma moduł równy 1.
5. Udowodnij, że każda izometria 2-wymiarowej przestrzeni euklidesowej jest albo obrotem, albo symetrią prostopadłą.
6. Udowodnić, że jeśli $A, B \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ są macierzami ortogonalnymi o wyznaczniku 1, to $AB = BA$. Wykaż, że nie jest to prawdą dla macierzy $n \times n$, $n > 2$.
7. Wykazać, że jeśli V jest przestrzenią euklidesową liniową oraz $\varphi: V \rightarrow V$ jest monomorfizmem liniowym takim, że

$$\forall_{v, w \in V} (v \perp w \rightarrow \varphi(v) \perp \varphi(w)),$$

to φ jest złożeniem izometrii i jednokładności.

8. Wykazać, że każda macierz ortogonalna $A \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ jest podobna do macierzy postaci

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{bmatrix}$$

lub

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & -\cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{bmatrix}$$

9. Niech $U = \text{lin}((1, 2, 1), (1, 0, 1))$ oraz $V = \text{lin}((1, 0, 1))^\perp$ w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ ze standardowym iloczynem skalarnym. Wskaż izometrię φ taką, że $\varphi[U] = V$.
10. ($\star$) Udowodnij, że każda izometria n -wymiarowej przestrzeni euklidesowej jest złożeniem k symetrii prostopadłych względem pewnych $n - 1$ wymiarowych podprzestrzeni dla pewnego $k \leq n$.