

Geometria z algebrą liniową II, 2020/2021

ćwiczenia 15. – rozwiązania

23 kwietnia 2021

1. Niech V będzie przestrzenią $\mathbb{R}^2$ ze standardowym iloczynem skalarnym oraz $\varphi: V \rightarrow V$ będzie zadane wzorem $\varphi((x, y)) = (x, -x + y)$. Sprawdź czy φ jest izometrią badając odpowiednią macierz.

Ponieważ baza standardowa jest tu ortonormalna, to wystarczy sprawdzić, czy macierz $M(\varphi)_{st}^{st}$ jest ortogonalna.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \neq I,$$

więc to nie jest izometria.

2. $(\cdots)$ Niech K będzie ciałem o charakterystyce większej niż 2. Znajdź izometrię pomiędzy K^2 ze standardowym iloczynem skalarnym oraz $\langle K^2, \langle \cdot, \cdot \rangle_2 \rangle$, gdzie

$$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle_2 = x_1 y_1 + 2x_2 y_2 + x_1 y_2 + x_2 y_1.$$

Wystarczy znaleźć bazę ortonormalną w tej drugiej przestrzeni. Niech pierwszym wektorem będzie $(1, 0)$, wtedy dostajemy wektor prostopadły jako spełniający równanie $x_1 + x_2 = 0$, zatem np. wektor $(1, -1)$ ma tę cechę. Jego długość to $\sqrt{1+2-1}$, zatem baza ortonormalna to $(1, 0), (1, -1)$, zatem

$$\varphi((x, y)) = (x + y, -y)$$

jest izometrią.

3. $(\cdot)$ Udowodnić, że każda rzeczywista wartość własna dowolnej macierzy ortogonalnej jest równa 1 lub -1 .

Skoro każda macierz ortogonalna jest macierzą izometrii w pewnej bazie ortogonalnej, a izometrie zachowują długości wektorów, to po przemnożeniu tej macierzy przez wektor długości 1 zawsze musi wyjść wektor długości 1, czyli jeśli v jest wektorem własnym długości 1, to $\varphi(v) = \pm v$.

4. Udowodnić, że każdy zespolony pierwiastek wielomianu charakterystycznego macierzy ortogonalnej ma moduł równy 1.

Jeśli $a \in \mathbb{R}$ jest rzeczywistą wartością własną, to na mocy poprzedniego zadania $a = \pm 1$, więc $|a| = 1$. Jeśli $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ jest wartością własną, to $\bar{a}$ też jest wartością własną. Więc jeśli $v \in \mathbb{C}^n$ jest wektorem własnym dla a , to $\bar{v}$ jest wektorem własnym dla $\bar{a}$. Mamy $2\Re v = v + \bar{v}$ oraz $\varphi(v + \bar{v}) = \varphi(v) + \varphi(\bar{v}) = av + \bar{a}\bar{v} = 2\Re av$, a więc $\|2\Re v\| = \|2a\Re v\|$, zatem $|a| = 1$, o ile $\Re(v) \neq 0$. W tym przypadku analogicznie rozważamy wektor iv , który też oczywiście jest wektorem własnym.

5. Udowodnij, że każda izometria 2-wymiarowej przestrzeni euklidesowej jest albo obrotem, albo symetrią prostopadłą.

Jeśli v_1, v_2 jest bazą ortonormalną tej przestrzeni to macierz tego przekształcenia w tej bazie jest ortogonalna. Kolumny macierzy ortogonalnej mają długość 1 w standardowym iloczynie skalarnym, zatem pierwsza kolumna jest postaci $(\cos \theta, \sin \theta)$ dla pewnych $\theta \in [0, 2\pi)$. Ale skoro są prostopadłe w iloczynie standardowym, to druga kolumna to $\pm 1 \cdot (-\sin \theta, \cos \theta)$. Zatem rozważana macierz to

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

lub

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix}$$

Ta pierwsza macierz, to macierz obrotu o kąt θ , a ta druga to symetria względem prostej $\text{lin}(v_1 \sin \theta + v_2(1 - \cos \theta))$.

6. Udowodnić, że jeśli $A, B \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ są macierzami ortogonalnymi o wyznaczniku 1, to $AB = BA$. Wykaż, że nie jest to prawdą dla macierzy $n \times n$, $n > 2$.

Na mocy poprzedniego zadania wiadomo, że jedyne macierze ortogonalne o wyznaczniku 1, to macierze obrotu. Rzeczywiście składanie obrotów jest przemienne. Nie jest to prawdą dla $n > 2$, np.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

oraz obie macierze

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

oraz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

są ortogonalne.

Można z łatwością to uogólnić na dowolne większe n dodając kolejne wiersze i kolumny z 1 tylko na przekątnej.

7. Wykazać, że jeśli V jest przestrzenią euklidesową liniową oraz $\varphi: V \rightarrow V$ jest monomorfizmem liniowym takim, że

$$\forall v, w \in V (v \perp w \rightarrow \varphi(v) \perp \varphi(w)),$$

to φ jest złożeniem izometrii i jednokładności.

Zauważmy, że φ przeprowadza bazę ortogonalną na bazę ortogonalną. Co więcej, jeśli $v \perp w$ są jednostkowe oraz takie, że $\|\varphi(v)\| = a$ i $\|\varphi(w)\| = b$ to $(v + w) \perp (v - w)$, zatem $\varphi(v) + \varphi(w) \perp \varphi(v) - \varphi(w)$, czyli

$$\langle \varphi(v), \varphi(v) \rangle - \langle \varphi(w), \varphi(w) \rangle = 0$$

a z drugiej strony

$$\langle \varphi(v), \varphi(v) \rangle - \langle \varphi(w), \varphi(w) \rangle = a^2 - b^2,$$

czyli $a = b$. Zatem φ przekształca każdy wektor v na wektor o długości $a\|v\|$.

Wobec powyższego przekształca ustaloną bazę ortonormalną na bazę ortogonalną $\mathcal{A}$ o długości wektorów a . Niech więc $\mathcal{B}$ będzie bazą ortonormalną powstałą przez podzielenie wektorów z bazy $\mathcal{A}$ przez a . Wtedy $\varphi = \phi \circ \psi$, gdzie ψ jest izometrią przeprowadzającą ustaloną bazę na bazę $\mathcal{B}$, a ϕ jest jednokładnością o skali a .

8. Wykazać, że każda macierz ortogonalna $A \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ jest podobna do macierzy postaci

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{bmatrix}$$

lub

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & -\cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{bmatrix}$$

Na pewno ma co najmniej jedną wartość własną, a skoro to izometria to ta wartość własna to ± 1 . Jeśli wektor własny to v , to φ zdefiniowane macierzą A obcięte do przestrzeni $(\text{lin}(v))^\perp$ jest izometrią na dwuwymiarowej przestrzeni, czyli obrotem lub symetrią.

9. Niech $U = \text{lin}((1, 2, 1), (1, 0, 1))$ oraz $V = \text{lin}((1, 0, 1))^\perp$ w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ ze standardowym iloczynem skalarnym. Wskaż izometrię φ taką, że $\varphi[U] = V$.

Baza V to $((0, 1, 0), (1, 0, -1))$ i jest ona prostopadła. Baza prostopadła U to $((1, 0, 1), (0, 1, 0))$. Zauważmy też, że $((0, 1, 0), (1, 0, -1), (1, 0, 1))$ jest bazą ortogonalną $\mathbb{R}^3$ oraz $\|(1, 0, -1)\| = \|(1, 0, 1)\|$. Zatem przekształcenie φ takie, że $\varphi((0, 1, 0)) = (0, 1, 0)$, $\varphi((1, 0, -1)) = (1, 0, 1)$ i $\varphi((1, 0, 1)) = (1, 0, -1)$ jest izometrią liniową oraz $\varphi((x, y, z)) = (x, y, -z)$.

10. (★) Udowodnij, że każda izometria n -wymiarowej przestrzeni euklidesowej jest złożeniem k symetrii prostopadłych względem pewnych $n - 1$ wymiarowych podprzestrzeni dla pewnego $k \leq n$.

Dowód indukcyjny. Dla $n = 1$ jasne.

Założmy, że twierdzenie jest prawdziwe dla $n - 1$ oraz niech $\varphi: V \rightarrow V$ będzie izometrią n -wymiarowej przestrzeni. Niech $v \in V$. Mamy dwa przypadki.

- (1) jeśli $\varphi(v) = v$, to niech $W = \text{lin}(v)$. Wtedy $\varphi|_{W^\perp}$ jest izometrią $n - 1$ wymiarowej przestrzeni, zatem $\varphi|_{W^\perp} = \varphi_1 \dots \varphi_k$ dla pewnych symetrii $\varphi_1, \dots, \varphi_k: W^\perp \rightarrow W^\perp$ $k - 2$ -wymiarowych podprzestrzeni $W_1, \dots, W_k$ przestrzeni $W^\perp$. Niech $\psi_1, \dots, \psi_k: V \rightarrow V$ będą symetrami prostopadłymi względem odpowiednio $W_1 + W, \dots, W_k + W$. Wtedy $\varphi = \psi_1 \circ \dots \circ \psi_k$.
- (2) jeśli $\varphi(v) \neq v$, to niech $w = \varphi(v) - v$ oraz niech $\psi: V \rightarrow V$ będzie symetrią względem $(\text{lin}(w))^\perp$. Wtedy $\psi(\varphi(v)) = v$, zatem na mocy pierwszego przypadku $\psi \circ \varphi = \psi_1 \circ \dots \circ \psi_k$ dla pewnych symetrii $\psi_1, \dots, \psi_k$. Ale wtedy $\varphi = \psi \circ \psi_1 \circ \dots \circ \psi_k$.