

Geometria z algebrą liniową II, 2020/2021

ćwiczenia 14. – rozwiązania

20 kwietnia 2021

1. ($\cdots$) W $\mathbb{R}^4$ ze standardowym iloczynem skalarnym znaleźć wzór na przekształcenie liniowe będące rzutem prostopadłym na przestrzeń $W = \text{lin}((2, 1, 0, 1), (1, 0, 0, 1))$ oraz na przekształcenie będące symetrią prostopadłą względem W . Niech φ będzie rzutem, a ψ symetrią. Znajdujemy bazę $W^\perp$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

czyli baza to: $\{(0, 0, 1, 0), (-1, 1, 0, 1)\}$. Zauważmy teraz, że wektory

$$(2, 1, 0, 1), (1, 0, 0, 1), (0, 0, 1, 0), (-1, 1, 0, 1)$$

są wektorami własnymi przekształceń φ i ψ , bowiem:

- $\varphi((2, 1, 0, 1)) = (2, 1, 0, 1), \varphi((1, 0, 0, 1)) = (1, 0, 0, 1), \varphi((0, 0, 1, 0)) = (0, 0, 0, 0), \varphi((-1, 1, 0, 1)) = (0, 0, 0, 0),$
- $\psi((2, 1, 0, 1)) = (2, 1, 0, 1), \psi((1, 0, 0, 1)) = (1, 0, 0, 1), \psi((0, 0, 1, 0)) = -(0, 0, 1, 0), \psi((-1, 1, 0, 1)) = -(-1, 1, 0, 1).$

Czyli jeśli rozważymy bazę $\mathcal{A} = \{(2, 1, 0, 1), (1, 0, 0, 1), (0, 0, 1, 0), (-1, 1, 0, 1)\}$, to:

$$M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, M(\psi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Znajdźmy więc macierze zmiany bazy:

$$M(\text{id})_{\mathcal{A}}^{\text{st}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

i odwracając ją otrzymujemy:

$$M(\text{id})_{\text{st}}^{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & \frac{-1}{3} \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

a więc:

$$\begin{aligned} M(\varphi)_{\text{st}}^{\text{st}} &= M(\text{id})_{\mathcal{A}}^{\text{st}} M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} M(\text{id})_{\text{st}}^{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & \frac{-1}{3} \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & \frac{-1}{3} \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & \frac{-1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

$$\psi(v) = 2\varphi(v) - v$$

A więc:

$$\varphi((a, b, c, d)) = \frac{1}{3}(2a + b + d, a + 2b - d, 0, a - b + 2d)$$

$$\psi((a, b, c, d)) = \frac{1}{3}(a + 2b + 2d, 2a + b - 2d, -3c, 2a - 2b + d).$$

2. $(\cdot)$ Niech $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ będzie macierzą o wierszach $v_1, \dots, v_n$. Niech $W(v_1, \dots, v_n) = 121$. Oblicz $|\det A|$.
 $(\det A)^2 = 121$, więc $|\det A| = 11$.
3. Niech $v_1, \dots, v_k$ będzie układem wektorów w przestrzeni euklidesowej V z iloczynem skalarnym $\langle \cdot, \cdot \rangle$ takim, że układ $v_1, \dots, v_{k-1}$ jest ortonormalny, a wyznacznik Grama układu $v_1, \dots, v_k$ wynosi 25. Niech w będzie rzutem prostopadłym v_k na $(\text{lin}(v_1, \dots, v_{k-1}))^\perp$. Ile wynosi $\|w\|$?

Zauważmy, że minor $k-1$ na $k-1$ to macierz jednostkowa, a w ostatnim wierszu i kolumnie są kolejno $\langle v_i, v_k \rangle$. A zatem

$$W(v_1, \dots, v_k) = \langle v_k, v_k \rangle - \sum_{i=1}^{k-1} \langle v_i, v_k \rangle^2 = 25$$

(po odjęciu od k -tego wiersza i -tego pomnożonego przez $\langle v_i, v_k \rangle$ dostajemy postać trójkątną).

Tymczasem,

$$\|w\| = \sqrt{\|v_k\|^2 - \|r\|^2},$$

gdzie

$$\|v_k\|^2 = \langle v_k, v_k \rangle$$

oraz r jest rzutem v_k na $\text{lin}(v_1, \dots, v_{k-1})$, więc

$$\|r\|^2 = \left\langle \sum_{i=1}^{k-1} \langle v_i, v_k \rangle v_i, \sum_{i=1}^{k-1} \langle v_i, v_k \rangle v_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{k-1} \langle v_i, v_k \rangle \langle v_i, v_k \rangle = \sum_{i=1}^{k-1} \langle v_i, v_k \rangle^2.$$

Zatem

$$\|w\| = \sqrt{\|v_k\|^2 - \|r\|^2} = \sqrt{\langle v_k, v_k \rangle - \sum_{i=1}^{k-1} \langle v_i, v_k \rangle^2} = \sqrt{25} = 5.$$

4. W $\mathbb{R}^3$ ze standardowym iloczynem skalarnym niech $v_1 = (1, 2, 1)$, $v_2 = (0, 1, -2)$, $v_3 = (0, t, 1)$. Niech w będzie rzutem prostopadłym wektora v_3 na $(\text{lin}(v_1, v_2))^\perp$. Dla jakich $t \in \mathbb{R}$ wektor w ma najmniejszą długość?

Zauważamy, że $v_1 \perp v_2$. Zatem

$$w = v_3 - \frac{2t+1}{6}v_1 - \frac{t-2}{5}v_2 = \frac{1}{30}(-5-10t, 2+4t, 1+2t)$$

Oraz $\|w\|^2 = \frac{1}{30}(2t+1)^2$ ma długość 0 dla $t = -1/2$.

5. $(\star)$ Niech $v_1, \dots, v_k$ będzie liniowo niezależnym układem wektorów w przestrzeni V . Niech $v \in V$ oraz w niech będzie rzutem prostopadłym v na $(\text{lin}(v_1, \dots, v_k))^\perp$. Wyznacz $\|w\|$ w zależności od $W(v_1, \dots, v_k)$ oraz $W(v_1, \dots, v_k, v)$.

Mamy $w = v - w'$, gdzie $w' \in \text{lin}(v_1, \dots, v_k)$. Niech $w' = \sum_{i=1}^k a_i v_i$. Zatem

$$W(v_1, \dots, v_k, v) = W(v_1, \dots, v_k, w + w') = \begin{vmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \dots & \langle v_1, v_k \rangle & \langle v_1, w' \rangle \\ \langle v_2, v_1 \rangle & \dots & \langle v_2, v_k \rangle & \langle v_2, w' \rangle \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \langle v_k, v_1 \rangle & \dots & \langle v_k, v_k \rangle & \langle v_k, w' \rangle \\ \langle w', v_1 \rangle & \dots & \langle w', v_k \rangle & \langle w, w' \rangle + \langle w', w' \rangle \end{vmatrix},$$

bowiem

$$\langle v_i, w + w' \rangle = \langle v_i, w \rangle + \langle v_i, w' \rangle = \langle v_i, w' \rangle,$$

oraz

$$\langle w, w' \rangle = 0.$$

Zatem

$$W(v_1, \dots, v_k, v) = \begin{vmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \dots & \langle v_1, v_k \rangle & \sum_{i=1}^k a_i \langle v_1, v_i \rangle \\ \langle v_2, v_1 \rangle & \dots & \langle v_2, v_k \rangle & \sum_{i=1}^k a_i \langle v_2, v_i \rangle \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \langle v_k, v_1 \rangle & \dots & \langle v_k, v_k \rangle & \sum_{i=1}^k a_i \langle v_k, v_i \rangle \\ \langle w', v_1 \rangle & \dots & \langle w', v_k \rangle & \sum_{i=1}^k a_i \langle w', v_i \rangle \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \dots & \langle v_1, v_k \rangle & 0 \\ \langle v_2, v_1 \rangle & \dots & \langle v_2, v_k \rangle & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \langle v_k, v_1 \rangle & \dots & \langle v_k, v_k \rangle & 0 \\ \langle w', v_1 \rangle & \dots & \langle w', v_k \rangle & \langle w, w \rangle \end{vmatrix}.$$

No ale pierwszy składnik tej sumy jest równy zero, bowiem ostatnia kolumna jest kombinacją poprzednich. Natomiast drugi z tych składników jest równy $\langle w, w \rangle W(v_1, \dots, v_k)$ (z rozwinięcia względem ostatniej kolumny). Zatem

$$W(v_1, \dots, v_k, v) = \|w\|^2 W(v_1, \dots, v_k),$$

a skoro $v_1, \dots, v_k$ są liniowo niezależne, to $W(v_1, \dots, v_k) > 0$ więc

$$\|w\| = \sqrt{\frac{W(v_1, \dots, v_k, v)}{W(v_1, \dots, v_k)}}.$$

6. Udowodnij, że jeśli przekształcenie liniowe pomiędzy przestrzeniami euklidesowymi zachowuje iloczyn skalarny, to jest monomorfizmem.

Jeśli $\varphi(v) = \varphi(w)$ oraz φ zachowuje iloczyn skalarny, to skoro $\varphi(v - w) = \varphi(v) - \varphi(w) = 0$, to $\langle \varphi(v - w), \varphi(v - w) \rangle_2 = 0$, a zatem $\langle v - w, v - w \rangle_1 = 0$, a zatem $v = w$.

7. Sprawdź, czy przekształcenie $\varphi: V_1 \rightarrow V_2$, gdzie $V_1 = \langle \mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle_1 \rangle$,

$$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle_1 = 10x_1y_1 + 14x_1y_2 + 14x_2y_1 + 20x_2y_2$$

natomiast V_2 to $\mathbb{R}^2$ ze standardowym iloczynem skalarnym, zadane wzorem $\varphi((x, y)) = (x + 2y, 3x + 4y)$ jest izometrią.

$$\begin{aligned} \langle \varphi(x_1, x_2), \varphi(y_1, y_2) \rangle &= \langle (x_1 + 2x_2, 3x_1 + 4x_2), (y_1 + 2y_2, 3y_1 + 4y_2) \rangle = \\ &= 10x_1y_1 + 14x_1y_2 + 14x_2y_1 + 20x_2y_2 = \langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle_1. \end{aligned}$$

8. Sprawdź czy macierze

$$\begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

są ortogonalne.

$$\begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Więc obie macierze są ortogonalne.