

Geometria z algebrą liniową II, 2018/2019

ćwiczenia 9.

26 marca 2019

1. $(\cdot)$ Niech $W = \text{lin}((0, 1, 2, 1), (2, -1, -6, -1))$. Znaleźć bazę $W^\perp$

- a) w $\mathbb{R}^4$ ze standardowym iloczynem skalarnym,
b) w $\mathbb{R}^4$ z iloczynem skalarnym

$$\langle (x_1, x_2, x_3, x_4), (y_1, y_2, y_3, y_4) \rangle = x_1 y_1 - x_1 y_2 - x_2 y_1 + 4x_2 y_2 + 2x_3 y_3 - x_3 y_4 - x_4 y_3 + 2x_4 y_4.$$

2. $(\cdot)$ Niech W będzie podprzestrzenią przestrzeni $\mathbb{R}^4$ ze standardowym iloczynem skalarnym opisaną układem równań:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

oraz niech $W_t = \text{lin}((2, 5, 0, 0), (t+2, 4+3t, -2+t, (t-2)^2))$. Dla jakich wartości parametru $t \in \mathbb{R}$ zachodzi:

- $W_t \subseteq W^\perp$?
- $W_t = W^\perp$?

3. W przestrzeni l^2 rozpatrzmy podprzestrzeń $W = \mathbb{R}_c^\infty$ ciągów prawie stale równe 0. Znajdź $W^\perp$. Czy $l^2 = W \oplus W^\perp$?

4. Niech $\langle \cdot, \cdot \rangle$ będzie iloczynem skalarnym w przestrzeni V . Wykaż, że dla dowolnych $v, w \in V$ zachodzi:

- a) $|\langle v, w \rangle| = \|v\| \cdot \|w\|$ wtedy i tylko wtedy, gdy v, w są liniowo zależne,
b) $\|v + w\| = \|v\| + \|w\|$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $t \geq 0$, że $v = tw$ lub $w = tv$.

5. W przestrzeni $\mathbb{R}^3$ ze standardowym iloczynem skalarnym rozważmy wektory: $\alpha = (-1, 2, 2), \beta = (-1 + 2\sqrt{3}, 2 + 2\sqrt{3}, 2 - \sqrt{3}), \gamma = (2, 1, t)$. Obliczyć kąt między wektorami α i β oraz określić dla jakich wartości parametru $t \in \mathbb{R}$ kąt między wektorami α i γ wynosi $2\pi/3$.

6. $(\star)$. Funkcję $\|\cdot\|: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$ nazywamy normą, jeśli $\|v\| = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy v jest wektorem zerowym, dla każdej liczby $a \in \mathbb{R}$, $\|av\| = |a|\|v\|$ oraz $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ dla każdych dwóch wektorów v, w . Udowodnij, że każda norma, która spełnia regułę równoległoboku

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2),$$

jest generowana przez pewien produkt skalarny.