Geometria z algebrą liniową II, 2018/2019
ćwiczenia 7.

19 marca 2019

Zadania

1. ($\cdot\cdot$) Niech $M \subseteq \mathbb{R}^4$ będzie opisana równaniem $x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 3$ oraz niech $p = (2, 4, 3, 0)$. Dla poniższych układów punktów sprawdzić, czy jest to baza punktowa M, a jeśli tak, podać współrzędne punktu p.

   a) $(1, 1, -1, 0), (1, 0, -1, -1), (3, 0, 0, 0), (0, 0, -1, -2)$,

   b) $(2, 2, 0, 1), (0, 0, -3, 0), (1, 1, -1, 0), (3, 3, 0, 3)$.

2. W $\mathbb{R}^3$ znaleźć prostą L przechodzącą przez punkt $(2, 1, 4)$ i przecinającą proste $L_1 = (0, 1, 1) + t(1, -1, 1)$ oraz $L_2 = (2, 0, 1) + t(1, 3, 0)$.

3. Niech $p_0, \ldots, p_n$ będzie bazą punktową przestrzeni afinicznej H. Wykaż, że jeśli $p \in H$ ma w bazie punktowej współrzędne $a_0, \ldots, a_n$, to p ma w układzie bazowym $p_0; \overrightarrow{p_0p_1}, \ldots, \overrightarrow{p_0p_n}$ współrzędne $a_1, \ldots, a_n$.

4. Udowodnić, że niepusty podzbiór H przestrzeni afinicznej E jest podprzestrzenią afiniczną wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych $p_1, p_2, p_3 \in H$, $\mathrm{af}(p_1, p_2, p_3) \subseteq H$.

5. ($\star$) Dla jakich ciał K w poprzednim zadaniu można zastąpić $\mathrm{af}(p_1, p_2, p_3) \subseteq H$ przez $\mathrm{af}(p_1, p_2) \subseteq H$?

6. Udowodnić, że proste $L_1, L_2 \subseteq K^2$ opisane równaniami $a_1x_1 + a_2x_2 = c$, oraz $b_1x_1 + b_2x_2 = d$ są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$.

7. ($\cdot$) Czy punkty $(1, 1, 1, 0), (0, 1, 1, 2), (0, 1, 1, 1)$ są w położeniu szczególnym?

8. Czy podprzestrzenie $\mathrm{af}((0, 1, 1), (0, 1, 2), (1, 1, 1))$ oraz $\mathrm{af}((2, 1, 1), (0, 1, 0), (2, 1, 2))$ przestrzeni K^4 są równoległe?

Praca domowa – seria 2

1. Niech A będzie macierzą 2×2 o wielomianie charakterystycznym $\lambda^2 - 5\lambda - 2 = 0$. Przedstaw macierze A^5 oraz A^{-1} jako kombinacje macierzy A oraz macierzy jednostkowej. *Wskazówka: tw. Cayleya-Hamiltona.*

2. Niech $M \subseteq \mathbb{R}^4$ będzie opisana równaniem $x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 3$ oraz niech $p = (2, 4, 3, 0)$. Czy układ punktów
$$(3, 0, 0, 0), (1, 2, 0, 0), (0, 0, -3, 0), (0, 0, -1, -2)$$
jest bazą punktową M? a jeśli tak, podać współrzędne punktu p w tej bazie.

3. W $\mathbb{R}^3$ znaleźć prostą L przechodzącą przez punkt $(0, 1, 0)$ i przecinającą proste $L_1 = (1, 0, 0) + t(0, 2, 1)$ oraz $L_2 = (0, 0, 0) + t(-1, 0, 1)$.

4. Znajdź układ równań, parametryzację oraz bazę punktową prostej znalezionej w poprzednim zadaniu.

5. Znajdź bazę punktową przestrzeni K^3 złożoną z punktów leżących na prostych $L_1 = (0, 0, 0) + t(1, 1, 0)$ oraz $L_2 = (1, 0, 1) + t(0, 1, 1)$.