Geometria z algebrą liniową II, 2018/2019
ćwiczenia 5.

12 marca 2019

1. $(\cdot\cdot)$ Znajdź układ równań liniowych opisująca warstwę podprzestrzeni $\mathrm{lin}((1,3,0,1),(2,9,4,2)) \subseteq \mathbb{R}^4$ zawierającą wektor $(1,1,-1,2)$.
2. Niech $K = \mathbb{Z}_2$. Dla $W = \mathrm{lin}((1,0,1,0),(0,1,1,1)) \subseteq K^4$ wyznaczyć wszystkie warstwy podprzestrzeni W.
3. Niech K będzie ciałem, oraz $x_1,\ldots,x_r$ będą różnymi elementami zbioru X i niech
$$W = \{f \in F(X,K)\colon f(x_1) = \ldots = f(x_r) = 0\}.$$
Wykazać, że jeśli H
$subseteq F(X,K)$ jest warstwą W, to istnieją $c_1,\ldots,c_r$, że
$$H = \{f \in F(X,K)\colon f(x_1) = c_1,\ldots,f(x_r) = c_r\}.$$
4. Niech W będzie m-wymiarową podprzestrzenią przestrzeni $(\mathbb{Z}_p)^n$. Ile jest warstw podprzestrzeni W?
5. $(\cdot)$ Czy punkt $(1,2,1) \in \mathbb{R}^3$ jest kombinacją afiniczną punktów $(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$?
6. Dla jakich wartości parametru $t \in \mathbb{R}$ punkt $(5,t,4,3) \in \mathbb{R}^4$ jest kombinacją afiniczną punktów
$$(1,0,1,0),(1,1,2,1),(0,1,1,0)?$$
7. Niech $p_0 = (1,1,0)$, $p_1 = (0,1,2)$, $q_0 = (3,1,3)$, $q_1 = (1,0,1)$. Czy istnieje punkt $p \in \mathbb{R}^3$, który jest kombinacją afiniczną p_0 i p_1 oraz jest kombinacją afiniczną q_0 i q_1.
8. $(\star)$ Udowodnij twierdzenie Menelaosa, które mówi, że jeśli x_1,x_2,x_3 są pewnymi (niezależnymi afinicznie) punktami w przestrzeni liniowej nad ciałem K oraz dla pewnych a,b,c, $y_1 = (1-a)x_2+ax_3$, $y_2 = (1-b)x_3+bx_1$ oraz $y_3 = (1-c)x_1+cx_2$ są takie, że y_3 jest afiniczną kombinacją y_1 i y_2, to $abc = (a-1)(b-1)(c-1)$.