

# Geometria z algebrą liniową II, 2020/2021

## ćwiczenia 4.

12 marca 2021

1. (·) Znajdź bazę Jordana i macierz przekształcenia w tej bazie dla przekształcenia  $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\varphi(x, y) = (x + y, y)$ .
2. (·) Znajdź bazę Jordana i przekształć do postaci Jordana macierz

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

3. Zbadaj, czy macierze

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 8 & -4 & 5 & 0 \\ 10 & -5 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

oraz

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & -5 & 0 \\ 1 & -2 & -24 & 3 \\ 0 & 1 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

są podobne.

4. Oblicz

$$\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}^{122}.$$

5. Znaleźć postać Jordana dla poniższych macierzy o wyrazach w  $\mathbb{R}$ :

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

6. (★) Niech  $f: M_{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$  będzie przekształceniem liniowym. Udowodnij, że istnieje dokładnie jedna macierz  $C$ , że  $f(A) = \text{tr}(AC)$  dla dowolnej  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ . Załóżmy dodatkowo, że  $f(AB) = f(BA)$  dla każdych macierzy  $A, B$ . Udowodnij, że wtedy istnieje  $\lambda \in \mathbb{R}$ , że  $f(A) = \lambda \text{tr}(A)$ .