Geometria z algebrą liniową II, 2020/2021
ćwiczenia 19. – szkice rozwiązań

11 maja 2021

1. ($\cdot\cdot$) Znajdź układ równań liniowych opisująca warstwę podprzestrzeni $\mathrm{lin}((1,3,0,1),(2,9,4,2)) \subseteq \mathbb{R}^4$ zawierającą wektor $(1,1,-1,2)$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 9 & 4 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 4/3 & 0 \end{bmatrix}$$

Co daje bazę rozwiązań $(12,-4,3,0),(-1,0,0,1)$ i zatem równania

$$\begin{cases} 12x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 0 \\ -x_1 + x_4 = 0 \end{cases}$$

opisują W, zatem

$$\begin{cases} 12x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 5 \\ -x_1 + x_4 = 1 \end{cases}$$

opisuje szukaną warstwę.

2. Niech $K = \mathbb{Z}_2$. Dla $W = \mathrm{lin}((1,0,1,0),(0,1,1,1)) \subseteq K^4$ wyznaczyć wszystkie warstwy podprzestrzeni W.

Jest cztery takie warstwy, bo układ równań na W to

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$$

i to jest jedna warstwa. Inne opcje to wyrazy wolne $1,0$, $0,1$ oraz $1,1$ i one dają warstwy zawierające odpowiednio wektory $(1,0,0,0)$, $(1,1,0,0)$ oraz $(0,1,0,0)$.

3. Niech K będzie ciałem, oraz $x_1,\ldots,x_r$ będą różnymi elementami zbioru X i niech

$$W = \{f \in F(X,K)\colon f(x_1) = \ldots = f(x_r) = 0\}.$$

Wykazać, że jeśli $H \subseteq F(X,K)$ jest warstwą W, to istnieją $c_1,\ldots,c_r$, że

$$H = \{f \in F(X,K)\colon f(x_1) = c_1,\ldots, f(x_r) = c_r\}.$$

No tak, jeśli $h \in F(X,K)$ takie, że $H = h + W$, to wystarczy wziąć $c_i = h(x_i)$.

4. Niech W będzie m-wymiarową podprzestrzenią przestrzeni $(\mathbb{Z}_p)^n$. Ile jest warstw podprzestrzeni W?

Mamy $n-m$ równań, w każdym p opcji na wyraz wolny. Zatem p^{n-m} (zauważ, że różny wybór wyrazów wolnych zawsze daje różne warstwy!).

5. ($\cdot$) Czy punkt $(1,2,1) \in \mathbb{R}^3$ jest kombinacją afiniczną punktów $(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$?

Nie, $(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$ to baza, więc jedyna opcja skombinowania to $1(1,0,0)+2(0,1,0)+1(0,0,1)$, ale $1+2+1 \neq 1$.

6. Dla jakich wartości parametru $t \in \mathbb{R}$ punkt $(5,t,4,3) \in \mathbb{R}^4$ jest kombinacją afiniczną punktów

$$(1,0,1,0),(1,1,2,1),(0,1,1,0)?$$

Mamy

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & t \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & t+1 \end{array}\right].$$

Zatem $(5,t,4,3)$ jest kombinacją $(1,0,1,0),(1,1,2,1),(0,1,1,0)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $t=-1$. Jest też wtedy kombinacją afiniczną, bo $2+3-4=1$.

7. Niech $p_0=(1,1,0)$, $p_1=(0,1,2)$, $q_0=(3,1,3)$, $q_1=(1,0,1)$. Czy istnieje punkt $p \in \mathbb{R}^3$, który jest kombinacją afiniczną p_0 i p_1 oraz jest kombinacją afiniczną q_0 i q_1.

Zatem mamy mieć $a_0p_0 + a_1p_2 - b_0q_0 - b_1q_1 = 0$, ale $a_0+a_1=1$ oraz $b_0+b_1=0$. Zatem

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \to$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -7 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Mamy sprzeczność, więc jest to niemożliwe.

8. Znaleźć układ równań oraz parametryzację opisujące hiperpłaszczyznę w $\mathbb{R}^4$ przechodzącą przez punkty: $(1,0,1,1),(2,5,3,0),(2,2,1,1),(0,1,2,3)$.

Hiperpłaszczyzna ta, to $(1,0,1,1)+\operatorname{lin}((1,5,2,-1),(1,2,0,0),(-1,1,1,2))$. Stąd od razu mamy parametryzację:

$$\{(1+t+u-w, 5t+2u+w, 1+2t+w, 1-t+2w) \colon t,u,w \in \mathbb{R}\}.$$

Znajdujemy układ równań opisujących przestrzeń styczną:

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \to \ldots \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{10}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Czyli baza współczynników to $\{(\frac{10}{3}, -\frac{5}{3}, 3, 1)\}$, a zatem przestrzeń styczną opisuje równanie $10x_1 - 5x_2 + 9x_3 + 3x_4 = 0$, wstawiamy wektor przesunięcia, czyli $10+9+3=22$, czyli równanie opisujące badaną hiperprzestrzeń to:

$$10x_1 - 5x_2 + 9x_3 + 3x_4 = 22.$$

9. Udowodnić, że proste $L_1, L_2 \subseteq K^2$ opisane równaniami $a_1x_1+a_2x_2=c$, oraz $b_1x_1+b_2x_2=d$ są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$.

Rzeczywiście to zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy ich przestrzenie styczne opisane równaniami$a_1x_1 + a_2x_2 = 0$, oraz $b_1x_1 + b_2x_2 = 0$ są tą samą przestrzenią, czyli układ równań $\left[\begin{array}{cc|c} a_1 & a_2 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 \end{array}\right]$ ma dać przestrzeń rozwiązań wymiaru 1, czyli jego lewa strona ma tylko jeden schodek, czyli zerowy wyznacznik.

10. ($\star$) Udowodnij twierdzenie Menelaosa, które mówi, że jeśli x_1,x_2,x_3 są pewnymi (niezależnymi afinicznie) punktami w przestrzeni liniowej nad ciałem K oraz dla pewnych a,b,c, $y_1=(1-a)x_2+ax_3$, $y_2=(1-b)x_3+bx_1$ oraz $y_3=(1-c)x_1+cx_2$ są takie, że y_3 jest afiniczną kombinacją y_1 i y_2, to $abc=(a-1)(b-1)(c-1)$.

Mamy

$$y_2 - y_1 = bx_1 - (1-a)x_2 + (1-a-b)x_3.$$

Stąd wiadomo, że $1-a-b \neq 0$, bo inaczej y_1, y_2 oraz x_1, x_2 są warstwami tej samej prostej. Z pierwszego i drugiego warunku mamy, że:

$$(1-b)y_1 - ay_2 = (1-a)(1-b)x_2 - abx_1,$$

czyli

$$\frac{(1-b)}{1-a-b}y_1 - \frac{a}{1-a-b}y_2 = \frac{(1-a)(1-b)}{1-a-b}x_2 - \frac{ab}{1-a-b}x_1,$$

jest jednocześnie afiniczną kombinacją x_1 i x_2 oraz y_1 i y_2, czyli musi być to y_3. Zatem

$$(1-c)x_1 + cx_2 = \frac{(1-a)(1-b)}{1-a-b}x_2 - \frac{ab}{1-a-b}x_1,$$

a zatem

$$(1-c)(1-a-b) = -ab$$

oraz

$$c(1-a-b) = (1-a)(1-b).$$

Ale łącząc te dwa równania w jedno, dostajemy naszą tezę.