

Geometria z algebrą liniową II, 2020/2021

ćwiczenia 12.

13 kwietnia 2021

1. $(\cdot)$ Dla jakich $t \in \mathbb{R}$ funkcjonal dwuliniowy $\langle v, w \rangle = v \cdot A \cdot w^T$, gdzie

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & t & 0 \\ 1 & t & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 5 \end{bmatrix},$$

zadaje iloczyn skalarny?

2. Niech $\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + x_2y_2 + x_2y_3 + x_3y_2 + 2x_3y_3$.

a) Czy jest to iloczyn skalarny w $\mathbb{R}^3$?

b) Dla jakich $r \in \mathbb{R}$, $\langle \cdot, \cdot \rangle|_{W_r}$ jest iloczynem skalarnym na

$$W_r = \text{lin}((r, 1, 0), (0, 1, 4))?$$

3. Niech $h: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ będzie formą dwuliniową symetryczną na skończonej wymiarowej przestrzeni V nad $\mathbb{R}$ i niech $\mathcal{A}$ będzie bazą V . Wykaż, że h jest iloczynem skalarnym wtedy i tylko wtedy, gdy $G(h, \mathcal{A})$ jest kongruentna nad $\mathbb{R}$ do macierzy jednostkowej.

4. Niech $W = \text{lin}((0, 1, 2, 1), (2, -1, -6, -1))$. Znaleźć bazę $W^\perp$

a) $(\cdot)$ w $\mathbb{R}^4$ ze standardowym iloczynem skalarnym,

b) w $\mathbb{R}^4$ z iloczynem skalarnym

$$\langle (x_1, x_2, x_3, x_4), (y_1, y_2, y_3, y_4) \rangle = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 4x_2y_2 + 2x_3y_3 - x_3y_4 - x_4y_3 + 2x_4y_4.$$

5. Niech W będzie podprzestrzenią przestrzeni $\mathbb{R}^4$ ze standardowym iloczynem skalarnym opisaną układem równań:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

oraz niech $W_t = \text{lin}((2, 5, 0, 0), (t+2, 4+3t, -2+t, (t-2)^2))$. Dla jakich wartości parametru $t \in \mathbb{R}$ zachodzi:

- $W_t \subseteq W^\perp$?
- $W_t = W^\perp$?

6. W przestrzeni l^2 rozpatrzmy podprzestrzeń $W = \mathbb{R}_c^\infty$ ciągów prawie stale równe 0. Znajdź $W^\perp$. Czy $l^2 = W \oplus W^\perp$?

7. $(\star)$. Funkcję $\|\cdot\|: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$ nazywamy normą, jeśli $\|v\| = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy v jest wektorem zerowym, dla każdej liczby $a \in \mathbb{R}$, $\|av\| = |a|\|v\|$ oraz $\|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|$ dla każdych dwóch wektorów v, w . Udowodnij, że każda norma, która spełnia regułę równoległoboku

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2),$$

jest generowana przez pewien produkt skalarny.