

Geometria z algebrą liniową II, 2020/2021

ćwiczenia 12. – rozwiązania

13 kwietnia 2021

1. $(\cdot)$ Dla jakich $t \in \mathbb{R}$ funkcjonal dwuliniowy $\langle v, w \rangle = v \cdot A \cdot w^T$, gdzie

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & t & 0 \\ 1 & t & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 5 \end{bmatrix},$$

zadaje iloczyn skalarny?

Korzystamy z kryterium Sylwestera.

$$\det A^{(1)} = 4 > 0$$

$$\det A^{(2)} = 12 > 0$$

$$\det A^{(3)} = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & t \\ 1 & t & 1 \end{vmatrix} = 9 - 4t^2$$

więc > 0 dla $t \in (-3/2, 3/2)$.

$$\det A^{(4)} = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & t & 0 \\ 1 & t & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 9 - 16t^2$$

więc > 0 dla $t^2 < 9/16$, czyli $t \in (-3/4, 3/4)$. Ponieważ $3/4 < 3$, to ostatecznie jest to iloczyn skalarny dla $t \in (-3/4, 3/4)$.

2. Niech $\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + x_2y_2 + x_2y_3 + x_3y_2 + 2x_3y_3$.

a) Czy jest to iloczyn skalarny w $\mathbb{R}^3$?

Nie jest to iloczyn skalarny, bo $\langle (1, 0, 0), (1, 0, 0) \rangle = 0$.

b) Dla jakich $r \in \mathbb{R}$, $\langle \cdot, \cdot \rangle|_{W_r}$ jest iloczynem skalarnym na

$$W_r = \text{lin}((r, 1, 0), (0, 1, 4))?$$

W bazie $(r, 1, 0), (0, 1, 4)$ macierz $\langle \cdot, \cdot \rangle|_{W_r}$ to

$$\begin{bmatrix} 4r+1 & 2r+5 \\ 2r+5 & 41 \end{bmatrix},$$

co daje iloczyn skalarny jeśli $r > -1/4$ oraz $-4r^2 + 144r + 16 > 0$, a więc dla $r \in (-2(\sqrt{82} - 9), -2(-\sqrt{82} - 9))$, $-2(\sqrt{82} - 9) > -1/4$, więc ostatecznie dla $r \in (-2(\sqrt{82} - 9), -2(-\sqrt{82} - 9))$.

3. Niech $h: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ będzie formą dwuliniową symetryczną na skończonej wymiarowej przestrzeni V nad $\mathbb{R}$ i niech $\mathcal{A}$ będzie bazą V . Wykaż, że h jest iloczynem skalarnym wtedy i tylko wtedy, gdy $G(h, \mathcal{A})$ jest kongruentna nad $\mathbb{R}$ do macierzy jednostkowej.

Rzeczywiście, jeśli $G(h, \mathcal{A})$ jest kongruentna do macierzy jednostkowej, to znaczy, że w pewnej bazie $\mathcal{B}$, $G(h, \mathcal{B}) = I$, ale I spełnia kryterium Sylwestera, więc jest to iloczyn skalarny. W drugą stronę, macierz iloczynu skalarnego w bazie ortonormalnej jest jednostkowa, więc rzeczywiście macierz tego iloczynu w pewnej bazie jest kongruentna z macierzą jednostkową.

4. Niech $W = \text{lin}((0, 1, 2, 1), (2, -1, -6, -1))$. Znaleźć bazę $W^\perp$

a) $(\cdot)$ w $\mathbb{R}^4$ ze standardowym iloczynem skalarnym,

$W^\perp$ to przestrzeń rozwiązań jednorodnego układu równań:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -6 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

czyli baza to $\{(2, -2, 1, 0), (0, -1, 0, 1)\}$.

b) w $\mathbb{R}^4$ z iloczynem skalarnym

$$\langle (x_1, x_2, x_3, x_4), (y_1, y_2, y_3, y_4) \rangle = x_1 y_1 - x_1 y_2 - x_2 y_1 + 4x_2 y_2 + 2x_3 y_3 - x_3 y_4 - x_4 y_3 + 2x_4 y_4.$$

$W^\perp$ to przestrzeń rozwiązań jednorodnego układu równań:

$$\begin{bmatrix} -1 & 4 & 3 & 0 \\ 3 & -6 & -11 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -4 & -3 & 0 \\ 0 & 3/2 & -1/2 & 1 \end{bmatrix},$$

czyli baza to $\{(4, 1, 0, -3/2), (3, 0, 1, 1/2)\}$.

5. Niech W będzie podprzestrzenią przestrzeni $\mathbb{R}^4$ ze standardowym iloczynem skalarnym opisaną układem równań:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

oraz niech $W_t = \text{lin}((2, 5, 0, 0), (t+2, 4+3t, -2+t, (t-2)^2))$. Dla jakich wartości parametru $t \in \mathbb{R}$ zachodzi:

- $W_t \subseteq W^\perp$?
- $W_t = W^\perp$?

Baza W to $\{(5, -2, 1, 0), (-5, 2, 0, 1)\}$, czyli równania opisujące $W^\perp$ to

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ -5x_1 + 2x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Aby $W_t \subseteq W^\perp$ wektory $(2, 5, 0, 0), (t+2, 4+3t, -2+t, (t-2)^2)$ muszą spełniać te równania. Pierwszy rzeczywiście zawsze spełnia natomiast rozważając drugi, otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} 5(t+2) - 2(4+3t) - 2+t = 0 \\ -5(t+2) + 2(4+3t) + (t-2)^2 = 0 \end{cases}$$

pierwsze równanie jest tautologią, natomiast drugie daje: $t^2 - 3t + 2 = 0$, co daje rozwiązania $t = 1, 2$. Czyli dla $t = 1$ lub $t = 2$ zachodzi $W_t \subseteq W^\perp$.

Aby $W_t = W^\perp$ muszą się zgadzać jeszcze wymiary, to znaczy $\dim W_t = 2$, czyli wektory $(2, 5, 0, 0), (t+2, 4+3t, -2+t, (t-2)^2)$ muszą być liniowo niezależne, co nie jest prawdą w przypadku $t = 2$ i jest w przypadku $t = 1$. Więc ostatecznie $W_t = W^\perp$ wtedy i tylko wtedy, gdy $t = 1$.

6. W przestrzeni l^2 rozpatrzmy podprzestrzeń $W = \mathbb{R}_c^\infty$ ciągów prawie stale równe 0. Znajdź $W^\perp$. Czy $l^2 = W \oplus W^\perp$?

Ponieważ $v_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots) \in \mathbb{R}_c^\infty$, to jeśli $\langle v, v_i \rangle = 0$, to $x_i = 0$, zatem $W^\perp = \{0\}$ oraz $l^2 \neq W \oplus W^\perp$, bowiem $(1, 1/2, 1/3, \dots) \in l^2$.

7. $(\star)$. Funkcję $\|\cdot\|: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$ nazywamy normą, jeśli $\|v\| = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy v jest wektorem zerowym, dla każdej liczby $a \in \mathbb{R}$, $\|av\| = |a|\|v\|$ oraz $\|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|$ dla każdych dwóch wektorów v, w . Udowodnij, że każda norma, która spełnia regułę równoległoboku

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2),$$

jest generowana przez pewien produkt skalarny.

Niech

$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{4}(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2),$$

oczywiście funkcja ta jest symetryczna ze względu na u i v .

Mamy też

$$\langle u, u \rangle = \frac{1}{4}(\|u + u\|^2 - \|u - u\|^2) = 4\|u\|^2/4 = \|u\|^2 \geq 0,$$

oraz równe zero wtedy i tylko wtedy, gdy $u = 0$.

Mamy też:

$$\|x + z + y\|^2 + \|x + z - y\|^2 = 2(\|x + z\|^2 + \|y\|^2)$$

oraz

$$\|x - z + y\|^2 + \|x - z - y\|^2 = 2(\|x - z\|^2 + \|y\|^2)$$

odejmując je od siebie mamy:

$$-\|x - z + y\|^2 - \|x - z - y\|^2 + \|x + z + y\|^2 + \|x + z - y\|^2 = 2(-\|x - z\|^2 + \|x + z\|^2)$$

a zatem (z definicji $\langle \cdot, \cdot \rangle$)

$$\langle x + y, z \rangle + \langle x - y, z \rangle = 2\langle x, z \rangle.$$

Wstawiając $x = (u + v)/2$, $y = (u - v)/2$ oraz $w = z$ dostaję precyzyjnie, że

$$\langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle = \langle u + v, w \rangle.$$

To wielokrotne stosowanie implikuje, że dla $a \in \mathbb{Z}$,

$$\langle au, v \rangle = a\langle u, v \rangle,$$

co za to przy odwrotnej aplikacji daje, że

$$\langle au, v \rangle = a\langle u, v \rangle,$$

dla $a \in \mathbb{Q}$. Teraz dla dowolnych u, v , niech $f(a) = a\langle u, v \rangle$ oraz $g(a) = \langle au, v \rangle$. Obie te funkcje są ciągłe oraz zgadzają się na liczbach wymiernych, więc muszą się zgadzać dla każdego $a \in \mathbb{R}$.

Wtedy $\|u\| = \sqrt{4\|u\|^2/4} = \sqrt{\frac{1}{4}(\|u + u\|^2 - \|u - u\|^2)} = \sqrt{\langle u, u \rangle}$.