

Geometria z algebrą liniową II, 2018/2019

ćwiczenia 11.

2 kwietnia 2019

Zadania

1. $(\cdot)$ Niech $v_1 = (1, 2, 1, 3)$, $v_2 = (3, 5, 1, 4)$ oraz $v_3 = (5, 8, s, 5)$. W $\mathbb{R}^5$ ze standardowym iloczynem skalarnym oblicz:

- a) wyznacznik Grama układu v_1, v_2, v_3 w zależności od $s \in \mathbb{R}$,
b) dla jakich $s \in \mathbb{R}$ układ v_1, v_2, v_3 jest liniowo niezależny.

2. $(\cdot)$ Dla jakich $t \in \mathbb{R}$ funkcja $\langle v, w \rangle = v \cdot A \cdot w^T$, gdzie

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & t & 0 \\ 1 & t & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 5 \end{bmatrix},$$

zadaje iloczyn skalarny?

3. Niech $\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + x_2y_2 + x_2y_3 + x_3y_2 + 2x_3y_3$.

- a) Czy jest to iloczyn skalarny w $\mathbb{R}^3$?
b) Dla jakich $r \in \mathbb{R}$, $\langle \cdot, \cdot \rangle|_{W_r}$ jest iloczynem skalarnym na

$$W_r = \text{lin}((r, 1, 0), (0, 1, 4))?$$

4. Niech $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ będzie macierzą o wierszach $v_1, \dots, v_n$. Niech $W(v_1, \dots, v_n) = 121$. Oblicz $|\det A|$.
5. Niech $v_1, \dots, v_k$ będzie układem wektorów w przestrzeni euklidesowej V z iloczynem skalarnym $\langle \cdot, \cdot \rangle$ takim, że układ $v_1, \dots, v_{k-1}$ jest ortonormalny, a wyznacznik Grama układu $v_1, \dots, v_k$ wynosi 25. Niech w będzie rzutem prostopadłym v_k na $(\text{lin}(v_1, \dots, v_{k-1}))^\perp$. Ile wynosi $\|w\|$?
6. W $\mathbb{R}^3$ ze standardowym iloczynem skalarnym niech $v_1 = (1, 2, 1)$, $v_2 = (0, 1, -2)$, $v_3 = (0, t, 1)$. Niech w będzie rzutem prostopadłym wektora v_3 na $(\text{lin}((v_1, v_2)))^\perp$. Dla jakich $t \in \mathbb{R}$ wektor w ma najmniejszą długość?
7. $(\star)$ Niech $v_1, \dots, v_k$ będzie liniowo niezależnym układem wektorów w przestrzeni V . Niech $v \in V$

oraz w niech będzie rzutem prostopadłym v na $(\text{lin}(v_1, \dots, v_k))^\perp$. Wyznacz $\|w\|$ w zależności od $W(v_1, \dots, v_k)$ oraz $W(v_1, \dots, v_k, v)$.

Praca domowa – seria 3

1. Niech $A_r = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & r \end{bmatrix}$. Dla jakich $r \in \mathbb{R}$ A_r jest odwracalna? Oblicz $(A_{-1})^{100}$.

2. Niech endomorfizm $\varphi: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ będzie dany wzorem $\varphi((x, y, z, t)) = (x, -3x - 4z + 2t, 2x + y + 4z - t, 2x + z)$. Znajdź wartości własne oraz bazy przestrzeni własnych dla φ , a następnie znajdź postać Jordana macierzy φ . Czy macierz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

jest macierzą φ w jakiejś bazie przestrzeni $\mathbb{R}^4$?

3. Niech $H = \text{af}((1, 0, 2), (-1, 1, 1), (2, 0, 3))$ oraz $L = (-1, -1, -1) + \text{lin}((1, -2, 0))$. Znajdź równanie płaszczyzny P równoległej do H i zawierającej punkt $(1, 1, 1)$ oraz obrazy punktu $(0, 1, 1)$ przy rzucie oraz symetrii względem P wzdłuż L .
4. Niech V będzie przestrzenią skończenie wymiarową oraz $a_1, \dots, a_k$ niech będą różnymi wartościami własnymi endomorfizmu $\varphi: V \rightarrow V$. Udowodnij, że jeśli $v_1, \dots, v_k$ są wektorami własnymi o wartościach własnych odpowiednio $a_1, \dots, a_k$, to są liniowo niezależne. Pokazać ponadto, że jeśli $a_1, \dots, a_k$ to wszystkie wartości własne, to φ jest diagonalizowalne wtedy i tylko wtedy, gdy $\dim V_{(a_1)} + \dots + \dim V_{(a_k)} = \dim V$.
5. Niech $A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ będą takie, że $AB = BA$ oraz rząd macierzy A jest równy 1 i $A^2 \neq 0$. Pokaż, że A jest macierzą diagonalizowalną oraz dla każdego n , macierz B ma przynajmniej jeden wektor własny oraz przynajmniej dwa liniowo niezależne wektory własne dla n parzystych.