

Geometria z algebrą liniową II, 2020/2021

ćwiczenia 11. – rozwiązania

9 kwietnia 2021

1. Niech $f \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ będzie opisane macierzą

$$M(f) = \begin{bmatrix} 7 & 1 & -6 \\ 0 & -1 & 0 \\ 8 & 2 & -7 \end{bmatrix}.$$

- a) Znajdź bazę Jordana dla tego przekształcenia.

Wielomian charakterystyczny to $w(a) = -(a+1)^2(a-1)$. Czyli wartości charakterystyczne to -1 i 1 . Wektor własny dla $a = 1$ to $(1, 0, 1)$, a dla wartości -1 , to $(-3, 0, 4)$. $\psi = f + id = (8x + y - 6z, 0, 8x + 2y - 6z)$ i szukamy wektora takiego, że $\psi(v) = (-3, 0, 4)$. Jest to np. wektor $(-4/5, 7, 0)$. A zatem $(1, 0, 1), (-3, 0, 4), (-4/5, 7, 0)$ jest bazą Jordana.

- b) Zbadaj, czy macierze $M(f)$ i $M(f^{-1})$ są podobne.

$$M(f^{-1}) = (M(f))^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -5 & -6 \\ 0 & -1 & 0 \\ 8 & -6 & -7 \end{bmatrix}.$$

Wielomian charakterystyczny to $w(a) = -(a+1)^2(a-1)$. Skoro też jest tylko jeden wektor własny dla -1 ($(-3, 0, 4)$), to ma tę samą postać Jordana, więc są podobne.

2. Niech

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ 8 & -6 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

- a) Podaj postać Jordana macierzy A .

Liczymy wielomian charakterystyczny $w(a) = (a+2)^4$. Mamy $r(A+2I) = 2$, a zatem $q_1 = 4 - 2 = 2$. $(A+2I)^2$ to macierz zerowa, więc $q_2 = 2 - 0 = 2$. Czyli mamy dwie klatki wielkości 2, czyli macierz w postaci Jordana to:

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

- b) Wypisz wszystkie macierze Jordana, które mają ten sam wielomian charakterystyczny i wielomian minimalny, co A .

W takim razie $m(a) = (a+2)^2$, czyli wiadomo, że $r((M+2I)^2) = 0$, czyli nie ma klatek wielkości 3. Wiadomo też, że $r(M+2I) \neq 0$, czyli jest co najmniej jedna klatka wielkości 2. Zatem mamy następujące opcje.

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

3. Oblicz

$$\begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{10}.$$

Wielomian charakterystyczny to $(a+2)(a+1)$, więc wartości własne to -1 i -2 , a wektory własne im odpowiadające to odpowiednio: $(1, -1)$ oraz $(-3, 2)$. Zatem niech $\mathcal{A} = ((1, -1), (-3, 2))$.

Mamy

$$M(id)_{\mathcal{A}}^{st} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

oraz

$$M(id)_{st}^{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Zatem

$$\begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{10} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1024 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3070 & 3069 \\ -2046 & -2045 \end{bmatrix}.$$

4. Niech $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ będzie endomorfizmem zadanym wzorem

$$\varphi((x_1, x_2, x_3)) = (-2x_1 + 2x_2 - x_3, x_2, x_1 - 2x_2)$$

oraz niech dla $s \in \mathbb{R}$,

$$A_s = \begin{bmatrix} -1 & 2 & s \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

będzie macierzą o wyrazach rzeczywistych.

a) Dla jakich $s \in \mathbb{R}$ istnieje taka baza $\mathcal{B}$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$, że $M(\varphi)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = A_s$.

$$M(\varphi)_{st}^{st} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix},$$

więc wartości własne to -1 oraz 1 . I odpowiednie przestrzenie własne to $\text{lin}((1, 0, -1))$ oraz $\text{lin}((1, 1, -1))$. $r(A - I) = r((A - I)^2) = r(A + I) = 2$. $r((A + I)^2) = 1$, więc klatka dla -1 mamy $s_1 = 3 - 2 = 1$, $s_2 = 2 - 1 = 1$ czyli klatka ma dwa wektory, a klatka dla 1 ma jeden wektor.

Wartości własne A_s to także -1 i 1 . Jeśli $s \neq 0$, to $r(A_s + I) = 2$ oraz $r((A_s + I)^2) = 1$, czyli $s_1 = 3 - 2 = 1$ i $s_2 = 2 - 1 = 1$ czyli klatka ma dwa wektory, a więc klatka dla 1 musi mieć jeden wektor, co daje taki sam rezultat, jak w przypadku macierzy A . Tymczasem jeśli $s = 0$, to $r(A_s + I) = 1$, zatem mamy dwie pojedyncze klatki dla wartości własnej -1 , czyli macierze nie są podobne. Inaczej mówiąc istnieje taka baza $\mathcal{B}$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$, że $M(\varphi)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = A_s$ wtedy i tylko wtedy, gdy $s \neq 0$.

b) Znaleźć bazę Jordana endomorfizmu φ .

Mamy już wektory własne $(1, 0, -1)$ i $(1, 1, -1)$ i wiemy, że trzeba znaleźć drugi wektor z klatki dla -1 , czyli za $(1, 0, -1)$.

$$(\varphi + \text{id})((x_1, x_2, x_3)) = (-x_1 + 2x_2 - x_3, 2x_2, x_1 - 2x_2 + x_3),$$

zatem w tym przekształceniu $(-1, 0, 0)$ przechodzi na $(1, 0, -1)$, czyli $\{(1, 0, -1), (-1, 0, 0), (1, 1, -1)\}$ jest bazą Jordana.

- c) Podać przykład macierzy B takiej, że $B^9 = A_0$ i obliczyć A_0^n dla każdej liczby naturalnej n .
Skoro $A_0^2 = I$, to $A_0^{2n} = I$ oraz $A_0^{2n+1} = A_0$, w szczególności $B = A_0$.

5. Rozważmy dla każdego $a \in \mathbb{R}$ formę kwadratową $q_a: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ zadaną wzorem

$$q(x, y, z) = ax^2 + 2yz.$$

Niech $h_a: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ oznacza taką symetryczną formę dwuliniową, że $q_a(v) = h_a(v, v)$ dla każdego $v \in \mathbb{R}^3$, oraz niech

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x - 2y + z = 0\}.$$

- a) W zależności od $a \in \mathbb{R}$ znajdź bazę ortogonalną przestrzeni $(\mathbb{R}^3, h)$ oraz wyznacz rząd i sygnaturę formy dwuliniowej h_a .

$$G(h_a, st) = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Zatem $r(q_a) = 2$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a = 0$ oraz 3 w przeciwnym przypadku.

W takim razie wektor $(0, 1, 1)$ jest nieizotropowy. $q_a(0, 1, 1) = 2$. Przestrzeń prostopadła do tego wektora zadana jest równaniem $y + z = 1$, a więc rozpięta jest przez $(1, 0, 0), (0, 1, -1)$. Mamy $q_a(0, 1, -1) = -2$ jest nieizotropowym a przestrzeń prostopadła do niego zadana jest równaniem $y - z = 1$. Zatem $\{(0, 1, 1), (0, 1, -1), (1, 0, 0)\}$ jest bazą prostopadłą $\mathcal{A}$ oraz

$$G(h_a, \mathcal{A}) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}.$$

Wobec tego jeśli $a < 0$ to $s(h_a) = -1$, jeśli $a = 0$, to $s(h_a) = 0$ oraz jeśli $a > 0$, to $s(h_a) = 1$.

- b) Dla jakich $a \in \mathbb{R}$, w przestrzeni dwuliniowej $(\mathbb{R}^3, h_a)$ zachodzi $\mathbb{R}^3 = W \oplus W^\perp$.

$W = \text{lin}((2, 1, 0), (-1, 0, 1))$ i jeśli to baza $\mathcal{A}$, to

$$M(h_a|_W, \mathcal{A}) = \begin{bmatrix} 4a & -2a + 1 \\ -2a + 1 & a \end{bmatrix},$$

a jej wyznacznik to $4a^2 - 4a^2 + 4a - 1 = 4a - 1$ jest niezerowy dla $a \neq 1/4$ - i wtedy teza zadania zachodzi.

6. Niech (V, h) będzie nieosobliwą przestrzenią dwuliniową.

- a) Załóżmy, że $\dim V \geq 4$ oraz $v \in V$ jest niezerowym wektorem izotropowym. Pokazać, że istnieją podprzestrzenie liniowe W_1 i W_2 , $W_1 \neq W_2$ wymiaru 3 przestrzeni V takie, że przestrzenie $(W_1, h|_{W_1 \times W_1})$ oraz $(W_2, h|_{W_2 \times W_2})$ są nieosobliwe oraz $v \in W_1 \cap W_2$.

Uzupełniamy v do bazy całej przestrzeni wektorami v_1, v_2, v_3 (bez straty ogólności zakładam, że V jest czterowymiarowa) parami prostopadłymi. Niech $\mathcal{A} = \{v, v_1, v_2, v_3\}$. Wtedy

$$G(h, \mathcal{A}) = \begin{bmatrix} 0 & a & b & c \\ a & x & 0 & 0 \\ b & 0 & y & 0 \\ c & 0 & 0 & z \end{bmatrix}.$$

Zatem $\det G(h, \mathcal{A}) = -a^2yz - b^2xz - c^2xy \neq 0$. Ale

$$\det G(h|_{\text{lin}(v, v_1, v_2)}, \{v, v_1, v_2\}) = -a^2y - b^2x,$$

$$\det G(h|_{\text{lin}(v, v_1, v_3)}, \{v, v_1, v_3\}) = -a^2z - c^2x,$$

$$\det G(h|_{\text{lin}(v, v_2, v_3)}, \{v, v_1, v_3\}) = -b^2z - a^2y,$$

Zatem co najmniej jeden z tych wyznaczników jest niezerowy. Bez straty ogólności niech to będzie pierwszy z nich i zatem $W_1 = \text{lin}(v, v_1, v_2)$. Jeśli któryś z pozostałych jest niezerowy, to to kończy dowód, zatem załóżmy, że są zerowe. Ale wtedy $G(h|_{\text{lin}(v, v_1, v_2+v_3)}, \{v, v_1, v_2+v_3\}) \neq 0$, więc bierzemy $W_2 = \text{lin}(v, v_1, v_2+v_3)$.

- b) Załóżmy, że $\dim V \geq 3$ oraz $v \in V$ jest niezerowym wektorem izotropowym. Pokazać, że istnieją podprzestrzenie liniowe W_1 i W_2 , $W_1 \neq W_2$ wymiaru 2 przestrzeni V takie, że przestrzenie $(W_1, h|_{W_1 \times W_1})$ oraz $(W_2, h|_{W_2 \times W_2})$ są nieosobliwe oraz $\text{lin}(v) = W_1 \cap W_2$.

Uzupełniamy v do bazy całej przestrzeni wektorami v_1, v_2, v_3 (bez straty ogólności zakładam, że V jest trzy-wymiarowa) parami prostopadłymi. Niech $\mathcal{A} = \{v, v_1, v_2\}$. Wtedy

$$G(h, \mathcal{A}) = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ a & x & 0 \\ b & 0 & y \end{bmatrix}.$$

Zauważmy, że $a, b \neq 0$, bo przestrzeń ma być nieosobliwa oraz to jest baza.

$$\det G(h|_{\text{lin}(v, v_1)}, \{v, v_1\}) = -a^2 \neq 0,$$

$$\det G(h|_{\text{lin}(v, v_2)}, \{v, v_2\}) = -b^2 \neq 0,$$

Wobec tego $W_1 = \text{lin}(v, v_1)$ oraz $W_2 = \text{lin}(v, v_2)$ spełniają warunki zadania.

7. Niech V będzie przestrzenią wymiaru 3 nad $\mathbb{C}$. Czy może istnieć endomorfizm $\varphi: V \rightarrow V$, że endomorfizmy $\varphi, \varphi^2, \dots, \varphi^9$ tworzą bazę przestrzeni $\text{End}(V)$?

Nie, z twierdzenia Cayleya–Hamiltona układ $\text{id}, \varphi, \varphi^2, \varphi^3$ nie jest liniowo niezależny, a więc nie jest liniowo niezależny układ $\varphi, \varphi^2, \varphi^3, \varphi^4$.

8. Niech (V, h) będzie przestrzenią dwuliniową nad $\mathbb{Q}$ i niech $v \neq 0$ będzie wektorem izotropowym. Czy może mieć miejsce równość $W = \text{lin}(v) \oplus (\text{lin}(v))^\perp$?

Nie, bo $(\text{lin}(v), h|_{\text{lin}(v)})$ jest osobliwa.