

Geometria z algebrą liniową II, 2020/2021

ćwiczenia 11.

9 kwietnia 2021

1. Niech $f \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ będzie opisane macierzą

$$M(f) = \begin{bmatrix} 7 & 1 & -6 \\ 0 & -1 & 0 \\ 8 & 2 & -7 \end{bmatrix}.$$

- a) Znajdź bazę Jordana dla tego przekształcenia.
- b) Zbadaj, czy macierze $M(f)$ i $M(f^{-1})$ są podobne.

2. Niech

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ 8 & -6 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

- a) Podaj postać Jordana macierzy A .
- b) Wypisz wszystkie macierze Jordana, które mają ten sam wielomian charakterystyczny i wielomian minimalny, co A .

3. Oblicz

$$\begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{10}.$$

4. Niech $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ będzie endomorfizmem zadanym wzorem

$$\varphi((x_1, x_2, x_3)) = (-2x_1 + 2x_2 - x_3, x_2, x_1 - 2x_2)$$

oraz niech dla $s \in \mathbb{R}$,

$$A_s = \begin{bmatrix} -1 & 2 & s \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

będzie macierzą o wyrazach rzeczywistych.

- a) Dla jakich $s \in \mathbb{R}$ istnieje taka baza $\mathcal{B}$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$, że $M(\varphi)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = A_s$.
 - b) Znaleźć bazę Jordana endomorfizmu φ .
 - c) Podać przykład macierzy B takiej, że $B^9 = A_0$ i obliczyć A_0^n dla każdej liczby naturalnej n .
5. Rozważmy dla każdego $a \in \mathbb{R}$ formę kwadratową $q_a: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ zadaną wzorem

$$q(x, y, z) = ax^2 + 2yz.$$

Niech $h_a: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ oznacza taką symetryczną formę dwuliniową, że $q_a(v) = h_a(v, v)$ dla każdego $v \in \mathbb{R}^3$, oraz niech

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x - 2y + z = 0\}.$$

- a) W zależności od $a \in \mathbb{R}$ znajdź bazę ortogonalną przestrzeni $(\mathbb{R}^3, h)$ oraz wyznacz rząd i sygnaturę formy dwuliniowej h_a .

- b) Dla jakich $a \in \mathbb{R}$, w przestrzeni dwuliniowej $(\mathbb{R}^3, h_a)$ zachodzi $\mathbb{R}^3 = W \oplus W^\perp$.
6. Niech (V, h) będzie nieosobliwą przestrzenią dwuliniową.
- Założmy, że $\dim V \geq 4$ oraz $v \in V$ jest niezerowym wektorem izotropowym. Pokazać, że istnieją podprzestrzenie liniowe W_1 i W_2 , $W_1 \neq W_2$ wymiaru 3 przestrzeni V takie, że przestrzenie $(W_1, h|_{W_1 \times W_1})$ oraz $(W_2, h|_{W_2 \times W_2})$ są nieosobliwe oraz $v \in W_1 \cap W_2$.
 - Założmy, że $\dim V \geq 3$ oraz $v \in V$ jest niezerowym wektorem izotropowym. Pokazać, że istnieją podprzestrzenie liniowe W_1 i W_2 , $W_1 \neq W_2$ wymiaru 2 przestrzeni V takie, że przestrzenie $(W_1, h|_{W_1 \times W_1})$ oraz $(W_2, h|_{W_2 \times W_2})$ są nieosobliwe oraz $\text{lin}(v) = W_1 \cap W_2$.
7. Niech V będzie przestrzenią wymiaru 3 nad $\mathbb{C}$. Czy może istnieć endomorfizm $\varphi: V \rightarrow V$, że endomorfizmy $\varphi, \varphi^2, \dots, \varphi^9$ tworzą bazę przestrzeni $\text{End}(V)$?
8. Niech (V, h) będzie przestrzenią dwuliniową nad $\mathbb{Q}$ i niech $v \neq 0$ będzie wektorem izotropowym. Czy może mieć miejsce równość $W = \text{lin}(v) \oplus (\text{lin}(v))^\perp$?