

Geometria z algebrą liniową II, 2018/2019

ćwiczenia 10.

29 marca 2019

1. Znaleźć bazę prostopadłą $\mathbb{R}^3$ z iloczynem skalarnym

$$\langle (x, y, z), (a, b, c) \rangle = xa + 2xb + 2ya + 7by + yc + zb + 10zc.$$

2. (·) Obliczyć współrzędne wektora $(1, 3, 4)$ w bazie ortogonalnej $(2, 2, -1), (2, -1, 2), (-1, 2, 2)$ $\mathbb{R}^3$ ze standardowym iloczynem skalarnym.
3. (·) Niech $W = \text{lin}((1, 1, 2, 1), (2, 3, 1, 3), (3, 5, 0, 5))$ oraz V dana jako przestrzeń rozwiązań układu równań:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

będą podprzestrzeniami przestrzeni $\mathbb{R}^4$

- a) ze standardowym iloczynem skalarnym,
b) z iloczynem skalarnym

$$\langle (x, y, z, t), (a, b, c, d) \rangle = 2xa + xd + ta + by + 2zc + 2td.$$

Znaleźć bazy ortogonalną przestrzeni W i ortonormalną przestrzeni V .

4. Rozpatrzmy w przestrzeni $\mathbb{R}^4$ ze standardowym iloczynem skalarnym podprzestrzenie $V = \{(x, y, z, t) : x - y + 4z + 5t = 0\}$ oraz $W = \text{lin}((1, 0, -1, 2), (1, 1, 1, 1))$. Znaleźć bazy ortonormalne przestrzeni $V^\perp$ oraz $W^\perp$.
5. Rozstrzygnąć, czy w $\mathbb{R}^4$ ze standardowym iloczynem skalarnym istnieje taki wektor α , że układ

$$\frac{1}{2}(1, 1, 1, 1), \frac{1}{2}(-1, -1, 1, 1), \frac{1}{2}(-1, 1, -1, 1), \alpha$$

jest bazą ortonormalną oraz wektor $(2, 4, 6, 2)$ ma w niej czwartą współrzędną równą 3.

6. W przestrzeni $\mathbb{R}^3$ ze standardowym iloczynem skalarnym znaleźć rzut prostopadły wektora $\alpha = (1, 1, 1)$ na płaszczyznę $V = \{(x, y, z) : x + 2y - z = 0\}$ oraz rzut prostopadły tego wektora na prostą $L = \text{lin}((1, 2, 3))$.
7. Znaleźć obraz wektora α z poprzedniego zadania w symetriach prostopadłych względem V oraz L .
8. W $\mathbb{R}^4$ ze standardowym iloczynem skalarnym znaleźć wzór na przekształcenie liniowe będące rzutem prostopadłym na przestrzeń $W = \text{lin}((2, 1, 0, 1), (1, 0, 0, 1))$ oraz na przekształcenie będące symetrią prostopadłą względem W .
9. Wykazać, że jeśli $v_1, \dots, v_k$ jest bazą prostopadłą podprzestrzeni W przestrzeni euklidesowej $\langle V, \langle \cdot, \cdot \rangle \rangle$ oraz $v_{k+1}, \dots, v_n$ jest bazą prostopadłą $W^\perp$ oraz $v \in V$, to
- a) wektor $v - \sum_{i=k+1}^n \frac{\langle v, v_i \rangle}{\langle v_i, v_i \rangle} v_i$ jest rzutem prostopadłym wektora v na W ,
- b) wektor $v - 2 \sum_{i=k+1}^n \frac{\langle v, v_i \rangle}{\langle v_i, v_i \rangle} v_i = -v + 2 \sum_{i=1}^k \frac{\langle v, v_i \rangle}{\langle v_i, v_i \rangle} v_i$ jest obrazem wektora v w symetrii prostopadłej względem W .
10. (★) Niech będzie dana skończenie wymiarowa przestrzeń V nad ciałem K . Funkcję $\xi : V \times V \rightarrow K$ nazywamy uogólnionym iloczynem skalarnym jeśli jest symetryczna i liniowa względem każdego argumentu. Rozstrzygnij dla jakich ciał K zawsze istnieje baza ortogonalna przestrzeni V względem uogólnionego iloczynu skalarnego ξ (czyli baza $v_1, \dots, v_n$ taka, że $\xi(v_i, v_j) = 0$ dla $i \neq j$).