

Geometria z algebrą liniową II, 2018/2019

ćwiczenia 2.

1 marca 2019

1. (·) Dla poniższych macierzy rzeczywistych A stwierdzić, czy A jest diagonalizowalna nad $\mathbb{R}$ oraz czy jest diagonalizowalna nad $\mathbb{C}$ i jeśli tak, znaleźć macierz C taką, że $C^{-1}AC$ jest diagonalna.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

2. (·) Dla poniższych macierzy A obliczyć A^{2019} .

$$\begin{bmatrix} 1 & -8 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

3. Dla poniższych macierzy A stwierdzić, czy A jest diagonalizowalna nad $\mathbb{R}$ oraz czy jest diagonalizowalna nad $\mathbb{C}$ i jeśli tak, znaleźć macierz C taką, że $C^{-1}AC$ jest diagonalna.

$$\begin{bmatrix} -6 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

4. Obliczyć $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}^{2019}$.

5. Wykazać, że dla każdego wielomianu postaci $w(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0$ o współczynnikach w ciele K istnieje macierz $A \in M_{n \times n}(K)$ taka, że $w(\lambda)$ jest wielomianem charakterystycznym macierzy A .
6. Podać przykład macierzy $A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{Q})$, która nie jest diagonalizowalna nad $\mathbb{Q}$, ale jest diagonalizowalna nad $\mathbb{R}$.
7. Wykazać, że jeśli macierz $A \in M_{n \times n}(K)$ ma n parami różnych wartości własnych, to jest diagonalizowalna nad K .
8. Wykazać, że jeśli macierz $A \in M_{n \times n}(K)$ ma dokładnie jedną wartość własną w K , to jest diagonalizowalna nad K wtedy i tylko wtedy, gdy jest diagonalna.
9. (★) Niech X będzie macierzą odwracalną o kolumnach $v_1, \dots, v_n$. Niech Y będzie macierzą o kolumnach $v_2, \dots, v_n, 0$. Udowodnij, że macierze $A = YX^{-1}$ oraz $B = X^{-1}Y$ mają rząd $n - 1$ oraz tylko zera jako wartości własne.