

Geometria z algebrą liniową II, 2020/2021

ćwiczenia 2. – rozwiązania

5 marca 2021

1. (..) Dla poniższych endomorfizmów znaleźć wartości własne i bazy odpowiadających im przestrzeni własnych:

a) $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \varphi((x, y)) = (2x - y, -x + 2y),$

b) $\varphi: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4, \varphi((x, y, z, t)) = (-6x - y + 2z, 3x + 2y + t, -14x - 2y + 5z, -t).$

a)

$$w(\lambda) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & -1 \\ -1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 3,$$

więc $\Delta = 16 - 12 = 4$, czyli wartości własne to 1, 3.

Przestrzeń własna dla wartości własnej 1 jest opisana układem równań $\begin{cases} x - y = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases}$, czyli jej baza jest jednowektorowa i jest to wektor (1, 1).

Przestrzeń własna dla wartości własnej 3 jest opisana układem równań $\begin{cases} -x - y = 0 \\ -x - y = 0 \end{cases}$, czyli jej baza jest jednowektorowa i jest to wektor (1, -1).

b)

$$\begin{aligned} w(\lambda) &= \begin{vmatrix} -6 - \lambda & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 - \lambda & 0 & 1 \\ -14 & -2 & 5 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = \\ &= (-1 - \lambda) \begin{vmatrix} -6 - \lambda & -1 & 2 \\ 3 & 2 - \lambda & 0 \\ -14 & -2 & 5 - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 1)(\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1) = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1)^2. \end{aligned}$$

Czyli wartości własne to 1 i -1.

Przestrzeń własna dla wartości 1:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -7 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ -14 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} &\xrightarrow{w_2 \cdot 7} \begin{bmatrix} -7 & -1 & 2 & 0 \\ 21 & 7 & 0 & 7 \\ -14 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 + 3w_1, w_3 - 2w_1, w_4 \cdot \frac{-1}{2}} \\ &\begin{bmatrix} -7 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 - 7w_4} \begin{bmatrix} -7 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 \cdot \frac{1}{4}} \\ &\begin{bmatrix} -7 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_1 + w_2} \begin{bmatrix} -7 & 0 & \frac{7}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_1 \cdot \frac{-1}{7}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

czyli baza jest jednowektorowa, np: $(1, -3, 2, 0)$.
Przestrzeń własna dla wartości -1 :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -5 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 1 \\ -14 & -2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} &\xrightarrow{w_2 \cdot 5, w_3 \cdot 5} \begin{bmatrix} -5 & -1 & 2 & 0 \\ 15 & 15 & 0 & 5 \\ -70 & -10 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 + 3w_1, w_3 - 14w_1} \\ \begin{bmatrix} -5 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 12 & 6 & 5 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} &\xrightarrow{w_2 \leftrightarrow w_3} \begin{bmatrix} -5 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 12 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_3 - 3w_2} \\ \begin{bmatrix} -5 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} &\xrightarrow{w_2 \cdot \frac{1}{4}, w_3 \cdot \frac{1}{5}} \begin{bmatrix} -5 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_1 + w_2} \\ \begin{bmatrix} -5 & 0 & \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} &\xrightarrow{w_1 \cdot \frac{-1}{5}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

czyli znów baza jest jednoelementowa, np: $(1, -1, 2, 0)$.

2. Dla endomorfizmu $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \varphi((x, y, z)) = (x - y, x + 3y + z, 2z)$ znaleźć wartości własne i odpowiadające im bazy przestrzeni własnych.

Liczymy wielomian charakterystyczny:

$$w(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -1 & 0 \\ 1 & 3 - \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 12\lambda + 8 = (2 - \lambda)^3.$$

Czyli jedyną wartością własną jest 2. Znajdujemy bazę przestrzeni $\mathbb{R}_{(2)}^2(\varphi)$:

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Zatem baza to $\{(1, -1, 0)\}$.

3. Dla endomorfizmu $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \varphi((a, b, c)) = (3a, a + 2b - c, a - b + 2c)$ zbadać, czy istnieje baza $\mathcal{A}$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$ złożona z wektorów własnych endomorfizmu φ . Jeśli tak, to podać przykład takiej bazy i wyliczyć $M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}$.

Liczymy wielomian charakterystyczny:

$$w(\lambda) = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 0 & 0 \\ 1 & 2 - \lambda & -1 \\ 1 & -1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = -a^3 + 7a^2 - 15a + 9 = (1 - a)(a - 3)^2.$$

Czyli wartościami własnymi są 1 i 3. Wyliczmy bazę $\mathbb{R}_{(1)}^3(\varphi)$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Czyli baza to $\{(0, 1, 1)\}$. Zajmijmy się $\mathbb{R}_{(3)}^3(\varphi)$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Czyli baza to $\{(1, 1, 0), (1, 0, 1)\}$. Zestawiając bazy $\mathbb{R}_{(1)}^3(\varphi)$ i $\mathbb{R}_{(3)}^3(\varphi)$ dostajemy bazę całej przestrzeni, a więc szukaną bazę własną $\mathcal{A} = \{(0, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 1)\}$ i wobec tego:

$$M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

4. Niech V będzie przestrzenią funkcji $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mających pochodne i -tego stopnia dla każdego $i \in \mathbb{N}$ oraz niech $\varphi: V \rightarrow V$ będzie takie, że $\varphi(f) = f'$ dla każdego $f \in V$. Wykazać, że każda liczba $a \in \mathbb{R}$ jest wartością własną φ . Dla każdego $a \in \mathbb{R}$ znaleźć V_a .

Rzeczywiście $\varphi(e^{ax}) = ae^{ax}$ dla każdego $a \in \mathbb{R}$, zatem a jest wartością własną φ . $V_a = \{f: f' = af\} = \{ce^{ax}: c \in \mathbb{R}\}$.

5. Niech $w(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0$ będzie wielomianem charakterystycznym macierzy $A \in M_{n \times n}(K)$. Wykazać, że

a) $\det A = a_0$,

b) $\operatorname{tr} A = (-1)^{n-1} a_{n-1}$

$w(\lambda) = \det(A - \lambda I)$, czyli $\det A$ dostaniemy po podstawieniu $\lambda = 0$, czyli to rzeczywiście a_0 .

Ze wzoru permutacyjnego widoczne jest, że jedyna opcja na pojawienie się w wyznaczniku macierzy $A - \lambda I$ wyrazów λ^{n-1} to iloczyn wyrazów na przekątnej to $\prod_{i=1}^n (x_i - \lambda)$, gdzie x_i to i -ty wyraz na przekątnej. Zatem współczynnik przy λ^{n-1} to $\sum_{i=1}^n x_i (-1)^{n-1} = (-1)^{n-1} \operatorname{tr} A$.

6. Niech $\mathcal{A} = \{v_1, \dots, v_n\}$ będzie bazą V oraz niech $\varphi: V \rightarrow V$ będzie endomorfizmem takim, że $\varphi(v_i) = v_{i+1}$ dla $i = 1, \dots, n-1$ i $\varphi(v_n) = a_0 v_1 + \dots + a_{n-1} v_n$. Znaleźć wielomian charakterystyczny φ .

A zatem

$$M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ & \dots & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a_{n-1} \end{bmatrix},$$

zatem

$$M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} - \lambda I = \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & -\lambda & \dots & 0 & a_1 \\ & \dots & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a_{n-1} - \lambda \end{bmatrix}$$

Bierzemy rozwinięcie Laplace'a względem ostatniej kolumny i mamy:

$$a_0(-1)^{n+1} + a_1(-1)^{n+2}(-\lambda) + a_2(-1)^{n+3}(-\lambda)^2 + \dots + (-1)^{2n} a_{n-1}(-\lambda)^{n-1} = (-1)^{n+1} \sum_{i=0}^{n-1} a_i \lambda^i.$$

7. $(\cdot)$ Zbadać, czy macierz $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ jest diagonalizowalna. Jeśli tak, to znaleźć macierz C , taką że $C^{-1}AC$ jest diagonalna.

Wyliczmy wielomian charakterystyczny:

$$w(\lambda) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 6,$$

czyli wartości własne to 2 i 3.

$V_{(2)}$ ma bazę jednowektorową $(1, -1)$, zaś $V_{(3)}$ wektor $(-2, 1)$, czyli $\mathcal{A} = \{(1, -1), (-2, 1)\}$ jest bazą własną oraz $M(id)_{st}^{\mathcal{A}} AM(id)_{\mathcal{A}}^{st} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ jest diagonalna. A zatem $C = M(id)_{\mathcal{A}}^{st} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

8. $(\star)$ Niech $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ oraz niech $F, G: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ będą przekształceniami liniowymi, takimi że

$$F \circ G - G \circ F = \alpha F.$$

Udowodnij, że:

- a) dla każdego $k \in \mathbb{N}$, $F^k \circ G - G \circ F^k = \alpha k F^k$,
b) istnieje $k \geq 1$, że $F^k = 0$.

Zadanie z IMC 1994. Mamy

$$\begin{aligned} F^k \circ G - G \circ F^k &= \sum_{i=1}^k (F^{k-i+1} \circ G \circ F^{i-1} - F^{k-i} \circ G \circ F^i) = \\ &= \sum_{i=1}^k F^{k-i} \circ (F \circ G - G \circ F) \circ F^{i-1} = \sum_{i=1}^k F^{k-i} \circ \alpha F \circ F^{i-1} = k\alpha F^k. \end{aligned}$$

Rozważmy przekształcenie $L: L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \rightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ zadane jako $L(F) = F \circ G - G \circ F$. Inaczej mówiąc przekształcenie to przekształca macierze $n \times n$ na macierze $n \times n$. Może więc mieć co najwyżej n^2 wartości własnych. Zakładając jednak, że dla pewnego F , dla każdego k , $F^k \neq 0$, mamy że dla każdego k , $k\alpha$ jest wartością własną i jest ich nieskończenie wiele. Ale to daje sprzeczność.