

Geometria z algebrą liniową I, 2019/2020

ćwiczenia 29.

24 stycznia 2020

1. Dla endomorfizmu $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\varphi((x, y, z)) = (x - y, x + 3y + z, 2z)$ znaleźć wartości własne i odpowiadające im bazy przestrzeni własnych.
2. ($\cdot$) Dla endomorfizmu $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\varphi((a, b, c)) = (3a, a + 2b - c, a - b + 2c)$ zbadać, czy istnieje baza $\mathcal{A}$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$ złożona z wektorów własnych endomorfizmu φ . Jeśli tak, to podać przykład takiej bazy i wyliczyć $M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}$.
3. Niech V będzie przestrzenią funkcji $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mających pochodne i -tego stopnia dla każdego $i \in \mathbb{N}$ oraz niech $\varphi: V \rightarrow V$ będzie takie, że $\varphi(f) = f'$ dla każdego $f \in V$. Wykazać, że każda liczba $a \in \mathbb{R}$ jest wartością własną φ . Dla każdego $a \in \mathbb{R}$ znaleźć V_a .
4. Niech $w(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0$ będzie wielomianem charakterystycznym macierzy $A \in M_{n \times n}(K)$. Wykazać, że
 - a) $\det A = a_0$,
 - b) $\text{tr} A = (-1)^{n-1} a_{n-1}$
5. Niech $\mathcal{A} = \{v_1, \dots, v_n\}$ będzie bazą V oraz niech $\varphi: V \rightarrow V$ będzie endomorfizmem takim, że $\varphi(v_i) = v_{i+1}$ dla $i = 1, \dots, n-1$ i $\varphi(v_n) = a_0 v_1 + \dots + a_{n-1} v_n$. Znaleźć wielomian charakterystyczny φ .
6. ($\cdot$) Zbadać, czy macierz $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ jest diagonalizowalna. Jeśli tak, to znaleźć macierz C , taką że $C^{-1}AC$ jest diagonalna.
7. ($\star$) Niech $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ oraz niech $F, G: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ będą przekształceniami liniowymi, takimi że

$$F \circ G - G \circ F = \alpha F.$$

Udowodnij, że:

- a) dla każdego $k \in \mathbb{N}$, $F^k \circ G - G \circ F^k = \alpha k F^k$,
- b) istnieje $k \geq 1$, że $F^k = 0$.