

Geometria z algebrą liniową I, 2019/2020

ćwiczenia 28.

21 lub 23 stycznia 2020

1. Dla endomorfizmu $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \varphi((x, y)) = (3x + 4y, 5x - 2y)$ oraz baz: $\mathcal{A}_1 = \{(4, 1), (3, 1)\}, \mathcal{A}_2 = \{(2, 3), (5, 8)\}, \mathcal{A}_3 = \{(4, 2), (1, 1)\}$ znaleźć macierze $\mathcal{A}_i = M(\varphi)_{\mathcal{A}_i}^{\mathcal{A}_i}$ oraz macierze C_{ij} spełniające $A_j = C_{ij}^{-1} A_i C_{ij}$ dla $i, j = 1, 2, 3$.
2. Podać przykład takich macierzy $A, A' \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$, że istnieje endomorfizm $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ oraz bazy $\mathcal{A}, \mathcal{A}', \mathcal{B}, \mathcal{B}'$ przestrzeni $\mathbb{R}^2$, że $A = M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}, B = M(\varphi)_{\mathcal{A}'}^{\mathcal{B}'}$, ale nie istnieje endomorfizm $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ oraz bazy $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ przestrzeni $\mathbb{R}^2$, że $A = M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}, B = M(\varphi)_{\mathcal{A}'}^{\mathcal{A}'}$.
3. Niech $A \in M_{n \times n}(K)$. Wykazać, że jeśli jedyną macierzą podobną do A jest A , to $A = aI$ dla pewnego $a \in K$.
4. Wykazać, że jeśli $A \in M_{n \times n}(K)$ i $\det A \neq 0$, to dla każdej macierzy $B \in M_{n \times n}(K)$, macierze AB i BA są podobne. Podać przykład macierzy $A, B \in M_{n \times n}(K)$ takich, że AB i BA nie są podobne.
5. $(\cdot)$ Wykazać, że $\text{tr}: M_{n \times n}(K) \rightarrow K$ jest przekształceniem liniowym.
6. $(\cdot\cdot)$ Dla poniższych endomorfizmów znaleźć wartości własne i bazy odpowiadających im przestrzeni własnych:
 - a) $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \varphi((x, y)) = (2x - y, -x + 2y)$,
 - b) $\varphi: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4, \varphi((x, y, z, t)) = (-6x - y + 2z, 3x + 2y + t, -14x - 2y + 5z, -t)$.
7. Dla poniższych endomorfizmów $\varphi: V \rightarrow V$ zbadać, czy istnieje baza $\mathcal{A}$ przestrzeni V złożona z wektorów własnych endomorfizmu φ . Jeśli tak, to podać przykład takiej bazy i wyliczyć $M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}$.
 - a) $V = \mathbb{R}^2, \varphi((a, b)) = (a - b, a + 3b)$,
 - b) $V = \mathbb{R}^4, \varphi((a, b, c, d)) = (2a + 4b, 5a + 3b, c + d, 3c - d)$.
8. Dla macierzy: $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ zbadać czy jest ona diagonalizowalna. Jeśli tak, to znaleźć macierze C_i , że $C_i^{-1} A_i C_i$ jest diagonalna, $i = 1, 2$.
9. $(\star)$ Niech macierz A będzie macierzą diagonalną $n \times n$ o wielomianie charakterystycznym $(c_1 - \lambda)^{d_1} \cdot \dots \cdot (c_k - \lambda)^{d_k}$, gdzie $c_i \neq c_j$ dla $i \neq j$. Niech V będzie podprzestrzenią wszystkich macierzy $n \times n$ takich, że $AB = BA$. Udowodnij, że $\dim V = d_1^2 + \dots + d_k^2$.