

Geometria z algebrą liniową I, 2019/2020

ćwiczenia 28. – rozwiązania

21 lub 23 stycznia 2020

1. Dla endomorfizmu $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\varphi((x, y)) = (3x + 4y, 5x - 2y)$ oraz baz: $\mathcal{A}_1 = \{(4, 1), (3, 1)\}$, $\mathcal{A}_2 = \{(2, 3), (5, 8)\}$, $\mathcal{A}_3 = \{(4, 2), (1, 1)\}$ znaleźć macierze $\mathcal{A}_i = M(\varphi)_{\mathcal{A}_i}^{\mathcal{A}_i}$ oraz macierze C_{ij} spełniające $A_j = C_{ij}^{-1} A_i C_{ij}$ dla $i, j = 1, 2, 3$.

$M(\varphi)_{\text{st}}^{\text{st}} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$. Sprawdźmy jak wektory z bazy standardowej przedstawiają się w bazie $\mathcal{A}_1$: $(1, 0) = (1, -1)_{\mathcal{A}_1}$, $(0, 1) = (-3, 4)_{\mathcal{A}_1}$. Więc $M(\text{id})_{\text{st}}^{\mathcal{A}_1} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ i oczywiście: $M(\text{id})_{\mathcal{A}_1}^{\text{st}} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. W takim razie:

$$\begin{aligned} A_1 &= M(\varphi)_{\mathcal{A}_1}^{\mathcal{A}_1} = M(\text{id})_{\text{st}}^{\mathcal{A}_1} M(\varphi)_{\text{st}}^{\text{st}} M(\text{id})_{\mathcal{A}_1}^{\text{st}} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -12 & 10 \\ 17 & -12 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -38 & -26 \\ 56 & 39 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Obliczmy jak się przedstawiają wektory z bazy $\mathcal{A}_2$ i $\mathcal{A}_3$ w bazie $\mathcal{A}_1$: $(2, 3) = (-7, 10)_{\mathcal{A}_1}$, $(5, 8) = (-19, 27)_{\mathcal{A}_1}$ oraz $(4, 2) = (-2, 4)_{\mathcal{A}_1}$, $(1, 1) = (-2, 3)_{\mathcal{A}_1}$ oraz współrzędne wektorów z $\mathcal{A}_3$ w bazie $\mathcal{A}_2$: $(4, 2) = (22, -8)_{\mathcal{A}_2}$, $(1, 1) = (3, -1)_{\mathcal{A}_2}$, czyli:

$$C_{12} = M(\text{id})_{\mathcal{A}_2}^{\mathcal{A}_1} = \begin{bmatrix} -7 & -19 \\ 10 & 27 \end{bmatrix},$$

$$C_{13} = M(\text{id})_{\mathcal{A}_3}^{\mathcal{A}_1} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix},$$

$$C_{23} = M(\text{id})_{\mathcal{A}_3}^{\mathcal{A}_2} = \begin{bmatrix} 22 & 3 \\ -8 & -1 \end{bmatrix},$$

$$C_{21} = C_{12}^{-1} = \begin{bmatrix} 27 & 19 \\ -10 & -7 \end{bmatrix},$$

$$C_{31} = C_{13}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix},$$

$$C_{32} = C_{23}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{2} & 4 \\ \frac{-3}{2} & 11 \end{bmatrix}.$$

czyli:

$$\begin{aligned} A_2 &= C_{21} A_1 C_{12} = \begin{bmatrix} 27 & 19 \\ -10 & -7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -38 & -26 \\ 56 & 39 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -7 & -19 \\ 10 & 27 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 38 & 39 \\ -12 & -13 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -7 & -19 \\ 10 & 27 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 124 & 331 \\ -46 & -123 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_3 &= C_{31} A_1 C_{13} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -38 & -26 \\ 56 & 39 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -28 & -2 \\ 44 & 5 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 12 & -9 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

2. Podać przykład takich macierzy $A, A' \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$, że istnieje endomorfizm $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ oraz bazy $\mathcal{A}, \mathcal{A}', \mathcal{B}, \mathcal{B}'$ przestrzeni $\mathbb{R}^2$, że $A = M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$, $B = M(\varphi)_{\mathcal{A}'}^{\mathcal{B}'}$, ale nie istnieje endomorfizm $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ oraz bazy $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ przestrzeni $\mathbb{R}^2$, że $A = M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}$, $B = M(\varphi)_{\mathcal{A}'}^{\mathcal{A}'}$.

Niech $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A' = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ oraz $\varphi((x, y)) = (x, y)$, wtedy dla $\mathcal{A} = \{(1, 0), (0, 1)\} = \mathcal{B} = \mathcal{A}'$ oraz $\mathcal{B}' = \{(1/2, 0), (0, 1)\}$, mamy $A = M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$, $B = M(\varphi)_{\mathcal{A}'}^{\mathcal{B}'}$. Tymczasem jeśli dla pewnych baz $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ przestrzeni $\mathbb{R}^2$, że $A = M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}$, $B = M(\varphi)_{\mathcal{A}'}^{\mathcal{A}'}$, to drugi warunek implikuje, że istnieje niezerowy wektor β_1 , że $\varphi(\beta_1) = 2\beta_1$, ale to nieprawda, skoro φ to tożsamość, na mocy macierzy $A = M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}$.

3. Niech $A \in M_{n \times n}(K)$. Wykazać, że jeśli jedyną macierzą podobną do A jest A , to $A = aI$ dla pewnego $a \in K$.

Zauważmy, że $T_{ij} = (T_{ij})^{-1}$, zatem $T_{ij}AT_{ij} = A$, czyli macierz A , w której zamieniono i -ty i j -ty wiersz oraz i -tą i j -tą kolumnę, to nadal macierz A . W ten sposób można zamienić miejscami dowolne dwa wyrazy na przekątnej, stąd ich równość. Co więcej dla $i \neq j$ mamy $E_{ij}(1) = E_{ij}(-1)$. Zatem $E_{ij}(1)AE_{ij}(-1) = A$. W elemencie i, k , $k \neq i, j$ po takiej operacji na wierszach pojawi się $a_{ik} + a_{jk}$, ale wyraz ten nie zmieni się po operacji na kolumnach. Zatem, $a_{j,k} = 0$. Czyli $A = aI$ dla pewnego $a \in K$.

Co więcej taka macierz, rzeczywiście ma tę własność, że tylko ona jest podobna do siebie, bo jest to macierz jedynkowości o skali a w dowolnej bazie – i w dowolnej bazie jest to przekształcenie ma tę macierz.

4. Wykazać, że jeśli $A \in M_{n \times n}(K)$ i $\det A \neq 0$, to dla każdej macierzy $B \in M_{n \times n}(K)$, macierze AB i BA są podobne. Podać przykład macierzy $A, B \in M_{n \times n}(K)$ takich, że AB i BA nie są podobne.

Wtedy $(A^{-1})(AB)A = BA$, co dowodzi podobieństwa. Jako kontrprzykład wystarczy wziąć macierze A zerową poza jedynką w prawym górnym rogu, a jako B macierz zerową poza jedynką w prawym dolnym rogu. Wtedy $AB = A$, zaś $BA = 0$ jest macierzą przekształcenia zerowego, podczas gdy A taką macierzą nie jest.

5. $(\cdot)$ Wykazać, że $\text{tr}: M_{n \times n}(K) \rightarrow K$ jest przekształceniem liniowym.

Rzeczywiście

$$\text{tr}(aA + bB) = \sum_{i=1}^n (aa_{ii} + bb_{ii}) = a \sum_{i=1}^n a_{ii} + b \sum_{i=1}^n b_{ii} = a \text{tr}(A) + b \text{tr}(B).$$

6. $(\cdot\cdot)$ Dla poniższych endomorfizmów znaleźć wartości własne i bazy odpowiadających im przestrzeni własnych:

a) $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \varphi((x, y)) = (2x - y, -x + 2y)$,

b) $\varphi: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4, \varphi((x, y, z, t)) = (-6x - y + 2z, 3x + 2y + t, -14x - 2y + 5z, -t)$.

a)

$$w(\lambda) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & -1 \\ -1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 3,$$

więc $\Delta = 16 - 12 = 4$, czyli wartości własne to 1, 3.

Przestrzeń własna dla wartości własnej 1 jest opisana układem równań $\begin{cases} x - y = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases}$, czyli jej baza jest jednowektorowa i jest to wektor $(1, 1)$.

Przestrzeń własna dla wartości własnej 3 jest opisana układem równań $\begin{cases} -x - y = 0 \\ -x - y = 0 \end{cases}$, czyli jej baza jest jednowektorowa i jest to wektor $(1, -1)$.

b)

$$w(\lambda) = \begin{vmatrix} -6 - \lambda & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 - \lambda & 0 & 1 \\ -14 & -2 & 5 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 - \lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (-1 - \lambda) \begin{vmatrix} -6 - \lambda & -1 & 2 \\ 3 & 2 - \lambda & 0 \\ -14 & -2 & 5 - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 1)(\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1) = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1)^2.$$

Czyli wartości własne to 1 i -1.

Przestrzeń własna dla wartości 1:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -7 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ -14 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} &\xrightarrow{w_2 \cdot 7} \begin{bmatrix} -7 & -1 & 2 & 0 \\ 21 & 7 & 0 & 7 \\ -14 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 + 3w_1, w_3 - 2w_1, w_4 \cdot \frac{-1}{2}} \\ &\begin{bmatrix} -7 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 - 7w_4} \begin{bmatrix} -7 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 \cdot \frac{1}{4}} \\ &\begin{bmatrix} -7 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_1 + w_2} \begin{bmatrix} -7 & 0 & \frac{7}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_1 \cdot \frac{-1}{7}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

czyli baza jest jednowektorowa, np: $(1, -3, 2, 0)$.

Przestrzeń własna dla wartości -1:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -5 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 1 \\ -14 & -2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} &\xrightarrow{w_2 \cdot 5, w_3 \cdot 5} \begin{bmatrix} -5 & -1 & 2 & 0 \\ 15 & 15 & 0 & 5 \\ -70 & -10 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 + 3w_1, w_3 - 14w_1} \\ &\begin{bmatrix} -5 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 12 & 6 & 5 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 \leftrightarrow w_3} \begin{bmatrix} -5 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 12 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_3 - 3w_2} \\ &\begin{bmatrix} -5 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 \cdot \frac{1}{4}, w_3 \cdot \frac{1}{5}} \begin{bmatrix} -5 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_1 + w_2} \\ &\begin{bmatrix} -5 & 0 & \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_1 \cdot \frac{-1}{5}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

czyli znów baza jest jednoelementowa, np: $(1, -1, 2, 0)$.

7. Dla poniższych endomorfizmów $\varphi: V \rightarrow V$ zbadać, czy istnieje baza $\mathcal{A}$ przestrzeni V złożona z wektorów własnych endomorfizmu φ . Jeśli tak, to podać przykład takiej bazy i wyliczyć $M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}$.

a) $V = \mathbb{R}^2, \varphi((a, b)) = (a - b, a + 3b),$

b) $V = \mathbb{R}^4, \varphi((a, b, c, d)) = (2a + 4b, 5a + 3b, c + d, 3c - d).$

a)

$$w(\lambda) = (1 - \lambda)(3 - \lambda) + 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 4,$$

czyli jest jedna wartości własna: 2. Przestrzeń własna dla wartości 2 rozpięta jest przez wektor $(1, -1)$, czyli przestrzeń rozpięta przez wektory własne jest tylko jednowymiarowa.

b)

$$w(\lambda) = ((2 - \lambda)(3 - \lambda) - 20)((1 - \lambda)(-1 - \lambda) - 3) = (\lambda^2 - 5\lambda - 14)(\lambda^2 - 4)$$

A więc są trzy wartości własne: $-2, 2$ i 7 .
Dla wartości -2 :

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 - \frac{5}{4}w_1, w_4 - w_3} \begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_1 \cdot \frac{1}{4}, w_2 \leftrightarrow w_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

czyli przykładowa baza to $(1, -1, 0, 0), (0, 0, 1, -3)$.
Dla wartości 2 :

$$\begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_1 \cdot \frac{1}{4}, w_4 - 3w_3} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 - w_1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 \cdot \frac{1}{5}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_1 \leftrightarrow w_2, w_3 \cdot (-1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

czyli bazę przestrzeni własnej stanowi wektor $(0, 0, 1, 1)$.
Dla wartości 7 :

$$\begin{bmatrix} -5 & 4 & 0 & 0 \\ 5 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -8 \end{bmatrix}$$

I widać od razu, że przestrzeń własną rozpina $(4, 5, 0, 0)$.

Razem wektory stanowią bazę przestrzeni V : $\mathcal{A} = \{(1, -1, 0, 0), (0, 0, 1, -3), (0, 0, 1, 1), (4, 5, 0, 0)\}$ oraz

$$M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

8. Dla macierzy: $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ zbadać czy jest ona diagonalizowalna. Jeśli tak, to znaleźć macierze C_i , że $C_i^{-1}A_iC_i$ jest diagonalna, $i = 1, 2$.

Rozwiązanie $w_1(\lambda) = (1 - \lambda)(3 - \lambda) + 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 4$. Jest jedna wartość własna równa 2 , a przestrzeń własna dla niej jest rozpięta przez wektor $(1, 1)$, więc nie ma bazy złożonej z wektorów własnych, czyli macierz A_1 nie jest diagonalizowalna.

$w_2(\lambda) = (5 - \lambda)(-1 - \lambda) + 9 = \lambda^2 - 4\lambda + 4$. Podobnie mamy tylko jedną wartość własną równą 2 , a przestrzeń własna, podobnie, rozpięta jest przez wektor $(1, 1)$, czyli znów nie ma bazy własnej i macierz nie jest diagonalizowalna.

9. (★) Niech macierz A będzie macierzą diagonalną $n \times n$ o wielomianie charakterystycznym $(c_1 - \lambda)^{d_1} \dots (c_k - \lambda)^{d_k}$, gdzie $c_i \neq c_j$ dla $i \neq j$. Niech V będzie podprzestrzenią wszystkich macierzy $n \times n$ takich, że $AB = BA$. Udowodnij, że $\dim V = d_1^2 + \dots + d_k^2$.

Zadanie z IMC 1994. Zatem A jest macierzą, która ma dokładnie k różnych wyrazów na przekątnej i każdy z nich występuje w krotności d_i , $i \leq k$. Niech kolejne wyrazy na przekątnej to a_{ii} , $i \leq n$. Niech $B = [b_{ij}]_{i,j \leq n}$. Niech $AB = [x_{ij}]_{i,j \leq n}$, $BA = [y_{ij}]_{i,j \leq n}$. Zatem $x_{ij} = a_{ii}b_{ij}$, $y_{ij} = a_{jj}b_{ij}$. W takim razie $AB = BA$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $i, j \leq n$ $b_{ij}(a_{ii} - a_{jj}) = 0$. Zatem $b_{ij} = 0$, gdy $a_{ii} \neq a_{jj}$ i może być dowolną liczbą w przeciwnym przypadku. Czyli $\dim V$ to liczba par i, j , że $a_{ii} = a_{jj}$. Ta liczba par dla $a_{ii} = a_{jj} = c_l$ wynosi d_l^2 , więc $\dim V = d_1^2 + \dots + d_k^2$.