

# Geometria z algebrą liniową I, 2019/2020

## ćwiczenia 26.

16 lub 17 stycznia 2020

### Zadania

1. Dla  $t \in \mathbb{R}$ , przekształcenie  $\varphi_t: \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^3$  zadane jest wzorem

$$\begin{aligned} \varphi_t((x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)) = \\ (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5, x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5, \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + tx_4 + 3x_5). \end{aligned}$$

- a) Znajdź bazę przestrzeni  $\ker \varphi_5$  oraz wymiar przestrzeni  $\operatorname{im} \varphi_5$ .  
b) Dla jakich  $t \in \mathbb{R}$  przekształcenie  $\varphi_t$  jest epimorfizmem?
2. Dane są macierze

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & t & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$
$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}.$$

- a) Obliczyć  $\det B$ . Obliczyć wyznacznik macierzy  $(B^T)^4(A_t)^3B^{-4}$  w zależności od  $t \in \mathbb{R}$ .  
b) Obliczyć wyznacznik macierzy

$$\begin{bmatrix} n & n & n & \dots & n & n & n \\ n-1 & n & n & \dots & n & n & n \\ n-2 & n-1 & n & \dots & n & n & n \\ & \dots & \dots & & \dots & & \\ 3 & 4 & 5 & \dots & n & n & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \end{bmatrix}.$$

3. Niech  $V$  i  $W$  będą przestrzeniami liniowymi skończonego wymiaru oraz niech  $\varphi: V \rightarrow W$  będzie przekształceniem liniowym. Wykazać, że  $\dim \ker \varphi + \dim \operatorname{im} \varphi = \dim V$ .
4. Dana jest baza  $\alpha_1 = (1, 0, 1), \alpha_2 = (1, -1, 0), \alpha_3 = (1, 0, -1)$  przestrzeni  $\mathbb{R}^3$  oraz funkcjonal  $f \in (\mathbb{R}^3)^*$ ,  $f(x, y, z) = x + 2y + z$ .

- a) Znaleźć współrzędne  $f$  w bazie sprzężonej  $\alpha_1^*, \alpha_2^*, \alpha_3^*$ .

- b) Niech  $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  będzie przekształceniem zadanym wzorem  $\varphi(x, y, z) = (x - y, 2x - y - z, y - z, 2x - 2z)$ . Znaleźć bazę obrazu  $\varphi^*$ .

5. Zadanie składa się z następujących krótkich problemów.

- a) Czy istnieje przekształcenie liniowe  $\varphi: (\mathbb{Z}_{11})^{10} \rightarrow (\mathbb{Z}_{11})^{11}$  takie, że  $\dim \ker \varphi = 2$  oraz  $\dim \operatorname{im} \varphi = 9$ ?  
b) Czy istnieje przekształcenie liniowe  $\varphi: V \rightarrow W$ , takie, że  $\varphi$  jest epimorfizmem, a  $\varphi^*: W^* \rightarrow V^*$  nie jest epimorfizmem?  
c) Niech  $A$  będzie macierzą rozmiaru  $3 \times 3$  nad ciałem  $K$ . Wiadomo, że  $\det A = -1$ . Oblicz  $\det(2A)$ .  
d) Czy formuła  $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$  jest prawdziwa dla wszystkich kwadratowych macierzy  $A$  i  $B$  równego rozmiaru?  
e) Niech  $(2, 0), (0, 1)$  będzie bazą  $\mathbb{R}^2$ . Czy baza sprzężona składa się z funkcjonałów  $f(x, y) = 2x, g(x, y) = y$ ?  
f) Niech  $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  i  $\psi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$  będą przekształceniami liniowymi. Czy przekształcenie liniowe  $\psi\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  może być monomorfizmem?

6. Niech  $V$  będzie przestrzenią liniową.

- (a) Załóżmy, że  $V$  jest sumą prostą podprzestrzeni liniowych  $W_1$  i  $W_2$ . Wykazać, że dla dowolnych przekształceń liniowych  $\varphi_1: W_1 \rightarrow Z, \varphi_2: W_2 \rightarrow Z$  istnieje dokładnie jedno przekształcenie liniowe  $\varphi: V \rightarrow Z$  takie, że  $\varphi(\alpha) = \varphi_1(\alpha)$  dla  $\alpha \in W_1$  oraz  $\varphi(\beta) = \varphi_2(\beta)$  dla  $\beta \in W_2$ .  
(b) Dane są dwie podprzestrzenie liniowe  $W_1$  i  $W_2$  przestrzeni  $V$  mające tę własność, że dla dowolnej przestrzeni liniowej  $Z$  oraz dowolnych przekształceń liniowych  $\varphi_1: W_1 \rightarrow Z, \varphi_2: W_2 \rightarrow Z$  istnieje dokładnie jedno przekształcenie liniowe  $\varphi: V \rightarrow Z$  takie, że  $\varphi(\alpha) = \varphi_1(\alpha)$  dla  $\alpha \in W_1$  oraz  $\varphi(\beta) = \varphi_2(\beta)$  dla  $\beta \in W_2$ . Udowodnić, że  $V = W_1 \oplus W_2$ .