

Geometria z algebrą liniową I, 2019/2020

ćwiczenia 26. – rozwiązania

16 lub 17 stycznia 2020

1. Dla $t \in \mathbb{R}$, przekształcenie $\varphi_t: \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^3$ zadane jest wzorem

$$\varphi_t((x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)) = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5, x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5, 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + tx_4 + 3x_5).$$

a) Znajdź bazę przestrzeni $\ker \varphi_5$ oraz wymiar przestrzeni $\operatorname{im} \varphi_5$.

Rozwiązujemy w takim razie układ równań na $\ker \varphi_5$:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 3 & 5 & 3 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{w_2 - w_1, w_3 - 3w_1} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{w_1 - w_2, w_3 - 2w_2} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Zatem rozwiązanie ogólne w postaci parametrycznej to $(-x_3 - x_5, -x_4, x_3, x_4, x_5)$, zatem baza $\ker \varphi_5$ to $(-1, 0, 1, 0, 0), (0, -1, 0, 1, 0), (-1, 0, 0, 0, 1)$. W takim razie $\operatorname{im} \varphi_5 = 5 - \dim \ker \varphi_5 = 5 - 3 = 2$.

b) Dla jakich $t \in \mathbb{R}$ przekształcenie φ_t jest epimorfizmem?

Sprawdzamy dla jakich $t \in \mathbb{R}$ wektory są liniowo niezależne.

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 3 & t & 3 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{w_2 - w_1, w_3 - 3w_1} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & t-3 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{w_1 - w_2, w_3 - 2w_2} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t-5 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Zatem dla $t \neq 5$, $\operatorname{im} \varphi = 5 - \dim \ker \varphi = 5 - 2 = 3$ i wtedy i tylko wtedy φ_t jest epi.

2. Dane są macierze:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & t & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}.$$

a) Obliczyć $\det B$. Obliczyć wyznacznik macierzy $(B^T)^4(A_t)^3B^{-4}$ w zależności od $t \in \mathbb{R}$.

Mamy tutaj postać blokową po transpozycji, więc $\det B = (5-4)(24-28) = -4$. Tymczasem $\det A = (-1)^5(5-3t) = 3t-5$. Zatem $\det(B^T)^4(A_t)^3B^{-4} = (3t-5)^3$.

b) Obliczyć wyznacznik macierzy

$$\begin{bmatrix} n & n & n & \dots & n & n & n \\ n-1 & n & n & \dots & n & n & n \\ n-2 & n-1 & n & \dots & n & n & n \\ & \dots & \dots & & \dots & & \\ 3 & 4 & 5 & \dots & n & n & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \end{bmatrix}.$$

Odejmujemy od wiersza w_i wiersz w_{i+1} , $i < n$ i mamy

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ & \dots & \dots & & \dots & & \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \end{bmatrix}.$$

Mamy transponowaną macierz trójkątną, więc jej wyznacznik to iloczyn wyrazów na przekątnej, czyli n .

3. Niech V i W będą przestrzeniami liniowymi skończonego wymiaru oraz niech $\varphi: V \rightarrow W$ będzie przekształceniem liniowym. Wykazać, że $\dim \ker \varphi + \dim \operatorname{im} \varphi = \dim V$.

Niech $v_1, \dots, v_n$ będzie bazą $\ker \varphi$ oraz $v_{n+1}, \dots, v_m$ jej uzupełnieniem do bazy całej przestrzeni V . Oczywiście $\operatorname{lin}(\varphi(v_{n+1}), \dots, \varphi(v_m)) = \operatorname{im} \varphi$, co więcej jest to układ liniowo niezależny, ponieważ jeśli $a_{n+1}\varphi(v_{n+1}) + \dots + a_m\varphi(v_m) = 0$, to $\varphi(a_{n+1}v_{n+1} + \dots + a_mv_m) = 0$, a zatem $a_{n+1}v_{n+1} + \dots + a_mv_m \in \ker \varphi$ jest kombinacją liniową $v_1, \dots, v_n$, a zatem jest równe 0 oraz $a_{n+1} = \dots = a_m = 0$.

4. Dana jest baza $\alpha_1 = (1, 0, 1), \alpha_2 = (1, -1, 0), \alpha_3 = (1, 0, -1)$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$ oraz funkcjonal $f \in (\mathbb{R}^3)^*$, $f(x, y, z) = x + 2y + z$.

a) Znaleźć współrzędne f w bazie sprzężonej $\alpha_1^*, \alpha_2^*, \alpha_3^*$.

Mamy $f(\alpha_1) = 2, f(\alpha_2) = -1$ i $f(\alpha_3) = 0$, zatem współrzędne f w bazie sprzężonej to $2, -1, 0$.

b) Niech $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ będzie przekształceniem zadany wzorem $\varphi(x, y, z) = (x-y, 2x-y-z, y-z, 2x-2z)$. Znaleźć bazę obrazu φ^* .

Baza $(\mathbb{R}^4)^*$ to x, y, z, t . Zatem $\operatorname{im} \varphi^* = \operatorname{lin}((x-y, 2x-y-z, y-z, 2x-2z)) = \operatorname{lin}((x-y, y-z))$ i to jest baza tej przestrzeni.

5. Zadanie składa się z następujących krótkich problemów.

a) Czy istnieje przekształcenie liniowe $\varphi: (\mathbb{Z}_{11})^{10} \rightarrow (\mathbb{Z}_{11})^{11}$ takie, że $\dim \ker \varphi = 2$ oraz $\dim \operatorname{im} \varphi = 9$?

Nie, skoro $11 = \dim \ker \varphi + \dim \operatorname{im} \varphi \neq \dim(\mathbb{Z}_{11})^{10} = 10$.

b) Czy istnieje przekształcenie liniowe $\varphi: V \rightarrow W$, takie, że φ jest epimorfizmem, a $\varphi^*: W^* \rightarrow V^*$ nie jest epimorfizmem?

Tak, niech $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(x, y) = x$ jest epimorfizmem. Tymczasem nie istnieje $f \in \mathbb{R}^*$ takie, że $\varphi^*(f) = f(\varphi) = y$, więc φ^* nie jest „na”.

c) Niech A będzie macierzą rozmiaru 3×3 nad ciałem K . Wiadomo, że $\det A = -1$. Oblicz $\det(2A)$.

Mamy zatem $\det A = 2^3 \cdot (-1) = -8$.

d) Czy formuła $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$ jest prawdziwa dla wszystkich kwadratowych macierzy A i B równego rozmiaru?

Nie, np. w przypadku parzystego rozmiaru $I + (-I) = 0$, ale $\det I = \det(-I) = 1$.

e) Niech $(2, 0), (0, 1)$ będzie bazą $\mathbb{R}^2$. Czy baza sprzężona składa się z funkcjonałów $f(x, y) = 2x, g(x, y) = y$?

Nie, $f((2, 0)) = 4 \neq 1$.

- f) Niech $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ i $\psi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ będą przekształceniami liniowymi. Czy przekształcenie liniowe $\psi\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ może być monomorfizmem?

Nie może. Mamy niezerowy $v \in \ker \varphi$, zatem $\psi(\varphi(v)) = \psi(0) = 0$, zatem $v \in \ker \psi\varphi$, nie jest więc to monomorfizm.

6. Niech V będzie przestrzenią liniową.

- (a) Załóżmy, że V jest sumą prostą podprzestrzeni liniowych W_1 i W_2 . Wykazać, że dla dowolnych przekształceń liniowych $\varphi_1: W_1 \rightarrow Z$, $\varphi_2: W_2 \rightarrow Z$ istnieje dokładnie jedno przekształcenie liniowe $\varphi: V \rightarrow Z$ takie, że $\varphi(\alpha) = \varphi_1(\alpha)$ dla $\alpha \in W_1$ oraz $\varphi(\beta) = \varphi_2(\beta)$ dla $\beta \in W_2$.

Rzeczywiście niech $v_1, \dots, v_n$ będzie bazą W_1 oraz $v_{n+1}, \dots, v_m$ bazą W_2 . Zatem $v_1, \dots, v_m$ jest bazą V i wystarczy zadać $\varphi(v_i) = \varphi_1(v_i)$ dla $i \leq n$ i $\varphi(v_i) = \varphi_2(v_i)$ dla $i > n$. Tak zadane przekształcenie liniowe spełnia warunki zadania.

- (b) Dane są dwie podprzestrzenie liniowe W_1 i W_2 przestrzeni V mające tę własność, że dla dowolnej przestrzeni liniowej Z oraz dowolnych przekształceń liniowych $\varphi_1: W_1 \rightarrow Z$, $\varphi_2: W_2 \rightarrow Z$ istnieje dokładnie jedno przekształcenie liniowe $\varphi: V \rightarrow Z$ takie, że $\varphi(\alpha) = \varphi_1(\alpha)$ dla $\alpha \in W_1$ oraz $\varphi(\beta) = \varphi_2(\beta)$ dla $\beta \in W_2$. Udowodnić, że $V = W_1 \oplus W_2$.

Dowodzimy, że $W_1 \cap W_2 = \{0\}$. Rzeczywiście w przeciwnym przypadku, niech niezerowy $v \in W_1 \cap W_2$. Wtedy niech $\varphi_1 \in W_1^*$, $\varphi_2 \in W_2^*$ będą takie, że $f(v) = 0$, $g(v) = 1$. Nie istnieje jednak φ opisane w zadaniu.

Co więcej $W_1 + W_2 = V$. Załóżmy więc przeciwnie. Rzeczywiście, skoro $W_1 \cap W_2 = \{0\}$, to $W_1 + W_2 = W_1 \oplus W_2$, zatem dla dowolnych przekształceń $\varphi_1 \in W_1^*$, $\varphi_2 \in W_2^*$ istnieje $\varphi': W_1 + W_2 \rightarrow K$ opisane w pierwszym podpunkcie. Niech jednak $v_1, \dots, v_k$ będzie bazą $W_1 + W_2$, zaś niech $v_k, \dots, v_m$ będzie jej niepustym uzupełnieniem do bazy V . Zadajemy $\psi_0, \psi_1 \in V^*$ zadane na bazie $v_1, \dots, v_k$ jako wartości φ' , zaś na wektorach $v_k, \dots, v_m$ dające wartości 0 w przypadku ψ_0 oraz 1 w przypadku ψ_1 . Te przekształcenia to dwa różne przekształcenia spełniające cechy z zadania, więc istnieje takiego przekształcenia nie jest wtedy jednoznaczne.