

Geometria z algebrą liniową I, 2019/2020  
ćwiczenia 25.

10 lub 14 stycznia 2020

1. ( $\cdot$ ) Obliczyć macierze odwrotne do macierzy:  $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 6 & 7 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ .

2. ( $\cdot$ ) Niech  $A = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 6 & 6 \\ 1 & 5 & 5 & 7 \end{bmatrix}$ . Obliczyć  $\det(A^{-3} \cdot B^9)$ .

3. Dla macierzy  $A$  z poprzedniego zadania, obliczyć wartość elementu w 2. wierszu, 3. kolumnie macierzy  $A^{-1}$ .

4. Dla jakich wartości  $s \in \mathbb{R}$ , macierz

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & s & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

jest odwracalna? Dla każdego takiego  $s$ , znaleźć  $A^{-1}$ .

5. Korzystając ze wzorów Cramera rozważyć, czy następujące układy równań są oznaczone, sprzeczne. Jeśli układ jest oznaczony, podać rozwiązanie.

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 9 \\ x - 2y + z = -2 \\ 3x + 2y + 2z = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 1 \\ x - y + z = 2 \\ 3x + 2y = 5 \end{cases}$$

6. Wykazać, że dla każdej macierzy trójkątnej  $A = [a_{ij}] \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ , macierz  $A^{-1} = [b_{ij}]$  też jest trójkątna. Ponadto wykazać, że dla każdego  $i = 1, \dots, n$ ,  $b_{ii} = 1/a_{ii}$ .

7. ( $\star$ ) Niech  $A$  będzie rzeczywistą odwracalną macierzą  $n \times n$  o wyrazach dodatnich. Wykaż, że liczba zerowych wyrazów w macierzy  $A^{-1}$  jest mniejsza lub równa  $n^2 - 2n$ . Ile zerowych elementów ma macierz

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & \dots & 2 \\ & \dots & & \dots & & \\ 1 & 2 & 1 & 2 & \dots & \dots \end{bmatrix}^{-1} \quad ?$$