

# Geometria z algebrą liniową I, 2019/2020

## ćwiczenia 24. – rozwiązania

9 lub 10 stycznia 2020

1. Oblicz wyznaczniki macierzy:

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 & 0 & 6 & 3 \\ 4 & 5 & 0 & 4 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sprowadzamy do postaci schodkowej:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 3 & 6 & 0 & 6 & 3 \\ 4 & 5 & 0 & 4 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_1 \leftrightarrow w_5} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 0 & 4 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 0 & 6 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 - 4w_1, w_3 - 5w_1, w_4 - 4w_1, w_5 - 3w_1} \\ & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -4 & -4 & -2 \\ 0 & -6 & -2 & -7 & -3 \\ 0 & -5 & -3 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_4 \cdot (-3), w_5 \cdot (-1/3)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -4 & -4 & -2 \\ 0 & -6 & -2 & -7 & -3 \\ 0 & 15 & 9 & 18 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_3 - 2w_2, w_4 + 5w_2} \\ & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -4 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -11 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_3 \leftrightarrow w_5} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -4 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -11 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_4 + 11w_3} \\ & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -4 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_4 \leftrightarrow w_5} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -4 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_5 + 2w_4} \\ & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -4 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Zatem wyznacznik końcowej macierzy to 6, czyli wyznacznik początkowej macierzy to  $6 \cdot (-3) \cdot (-1/3) \cdot (-1)^3 = -6$ .

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_1 \leftrightarrow w_2 \leftrightarrow w_3 \leftrightarrow w_4 \leftrightarrow w_5 \leftrightarrow w_6} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Następnie wykonujemy już tylko operacje na ostatnim wierszu  $\cdot 3$  daje  $6, 9, 0, 0, 0, 0, -2w_1$  i mamy  $0, 5, -6, 0, 0, 0, \cdot 3$  daje  $0, 15, -18, 0, 0, 0, -5w_2$  daje  $0, 0, -28, -15, 0, 0, \cdot 3$  daje  $0, 0, -84, -45, 0, 0, +28w_3$  i mamy  $0, 0, 0, 11, 84, 0, \cdot 3$  i mamy  $0, 0, 0, 33, 252, 0, -11w_4$  i dostajemy  $0, 0, 0, 0, 230, -33, \cdot 3$  daje  $0, 0, 0, 0, 690, -99$  i w końcu  $-230w_5$  daje  $0, 0, 0, 0, 0, -559$ . Zatem końcowy wyznacznik to  $-559 \cdot 3^5$ , czyli początkowy to 559.

2. ( $\cdot$ ) Oblicz wyznacznik macierzy:

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 6 & 7 \\ 7 & 9 & 2 & 8 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Zamieniając pierwszą kolumnę z trzecią i drugą z czwartą mamy postać blokową. Wyznacznik wtedy wynosi  $(48 - 14)(3 - 5) = -68$  i jest taki sam jak w początkowej macierzy.

3. ( $\cdot$ ) Niech

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 6 & 6 \\ 1 & 5 & 5 & 7 \end{bmatrix}.$$

Oblicz  $\det(A \cdot B)$ ,  $\det(A + B)$ ,  $\det(A^7)$ ,  $\det(A^{-3} \cdot B^9)$ .

$$\det A = 2 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-2)(-1) = 2,$$

$$\det B = 2 \cdot (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 6 \\ 1 & 5 & 5 \end{vmatrix} = (-2)(-5) = 10.$$

Wobec tego:  $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B = 20$ ,  $\det(A^7) = (\det A)^7 = 128$ ,  $\det(A^{-3} \cdot B^9) = \frac{1}{(\det A)^3} \cdot (\det B)^8 = \frac{100000000}{8} = 12500000$ . Natomiast  $\det A + B$  nie da się tak prosto policzyć, trzeba ręcznie:

$$\det A + B = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 7 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 0,$$

ponieważ dwa ostatnie wiersze są równe.

4. Niech  $A \in M_{m \times n}(K)$ ,  $B \in M_{n \times m}(K)$ . Wykazać, że jeśli  $m > n$ , to  $\det A \cdot B = 0$ .

Wiersze macierzy wynikowej to kombinacje wierszy macierzy  $B$ . Ale macierz  $B$  ma  $n$  wierszy, a mamy  $m$  ich kombinacji, stąd te kombinacje nie mogą być układem liniowo niezależnym, więc wyznacznik macierzy  $AB$  musi wynosić 0.

5. Obliczyć wyznaczniki następujących macierzy  $n \times n$  w zależności od parametrów  $s, t \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & s & s & \dots & s \\ 1 & s & 0 & s & \dots & s \\ & \dots & & \dots & & \dots \\ 1 & s & s & s & \dots & s \\ 1 & s & s & s & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

Jasne jest, że dla  $s = 0$ , wyznacznik jest równy zero. Załóżmy zatem, że  $s \neq 0$ . Przekształcamy  $w_2 - sw_1$ ,  $\dots$ ,  $w_n - sw_1$  i mamy:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & -s & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & -s & 0 & \dots & 0 \\ & \dots & & \dots & & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & -s \end{bmatrix},$$

Teraz  $w_1 \leftrightarrow w_n$ , następnie  $w_n \cdot s$  i dostajemy

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & -s \\ 1 & -s & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & -s & 0 & \dots & 0 \\ & \dots & & \dots & & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & s & s & s & \dots & s \end{bmatrix},$$

W końcu aplikujemy  $w_2 - w_1$ ,  $w_3 - w_1$ ,  $\dots$ ,  $w_{n-1} - w_1$ , i mamy

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & -s \\ 0 & -s & 0 & 0 & \dots & s \\ 0 & 0 & -s & 0 & \dots & s \\ & \dots & & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & s \\ 0 & s & s & s & \dots & s \end{bmatrix},$$

I ostatecznie  $w_n + w_2$ ,  $w_n + w_3$ ,  $\dots$ ,  $w_n + w_{n-1}$ :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & -s \\ 0 & -s & 0 & 0 & \dots & s \\ 0 & 0 & -s & 0 & \dots & s \\ & \dots & & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & s \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & (n-1)s \end{bmatrix},$$

A zatem wyznacznik końcowej macierzy to  $(n-1)s^{n-1}(-1)^{n-2}$ , a zatem wyznacznik początkowej macierzy to  $(n-1)s^{n-2}(-1)^{n-1}$ .

$$\begin{bmatrix} 2 & t & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & t & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & t & \dots & 0 \\ & \dots & & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & t \\ t & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{bmatrix}.$$

Rozwinięcie Laplace'a względem pierwszej kolumny daje

$$\begin{vmatrix} 2 & t & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & t & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & t & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & t \\ t & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2^{n-1} + (-1)^{n+1} t \cdot t^{n-1} = 2^n + (-1)^{n+1} t^n$$

6. Permutacja zbioru  $X$  to bijekcja  $X \rightarrow X$ .  $S_n$  to zbiór wszystkich permutacji zbioru  $\{1, \dots, n\}$ . Transpozycja to permutacja  $\tau \in S_n$  taka, że dla pewnych  $0 < i < j \leq n$ ,  $\tau(i) = j$ ,  $\tau(j) = i$  oraz  $\tau(k) = k$  dla  $k \neq i, j$ ,  $0 < k \leq n$ . Udowodnij, że każda permutacja jest złożeniem pewnej liczby transpozycji.

Dowód przez indukcję. Dla dwóch oczywiste. Dla  $n+1$  przesuwamy transpozycjami właściwy element na ostatnie miejsce i o nim zapominamy aplikując założenie indukcyjne.

7. Permutacja jest parzysta jeśli jest złożeniem parzystej liczby transpozycji, zaś nieparzysta, jeśli jest złożeniem nieparzystej liczby transpozycji. Wykaż, że każda permutacja jest parzysta **albo** nieparzysta.

Dla dowolnej permutacji  $\sigma$  możemy rozważyć jej macierz  $M(\sigma) = [a_{i,j}]_{i,j} \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$  zdefiniowaną jako  $a_{i,j} = 1$ , gdy  $\sigma(j) = i$  oraz  $a_{i,j} = 0$  w przeciwnym przypadku. Zauważmy, że składanie permutacji odpowiada mnożeniu ich macierzy, oraz, że jeśli  $\tau$  jest transpozycją, to  $\det M(\tau) = -1$ . Zatem, jeśli permutacja jest złożeniem nieparzystej liczby transpozycji, wyznacznik jej macierzy wynosi  $-1$ , zaś jeśli jest złożeniem parzystej liczby transpozycji, jej wyznacznik to  $1$ . Nie może więc być jednocześnie złożeniem pewnej parzystej liczby transpozycji oraz jednocześnie pewnej nieparzystej liczby transpozycji.

Inny pomysł jest następujący: rozpatrzmy permutację  $\sigma \in S_n$  oraz niech  $w(\sigma) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\sigma(j) - \sigma(i))$ . Zauważamy z łatwością, że jeśli  $\tau$  jest transpozycją, to  $w(\tau) < 0$ , a ponadto znak  $w(\sigma \circ \tau)$  jest przeciwny do znaku  $w(\sigma)$ . To oznacza (prosty argument indukcyjny), że znak  $w(\sigma)$  jest dodatni wtedy i tylko wtedy gdy  $\sigma$  jest permutacją parzystą, zaś ujemny w przeciwnym przypadku. Wobec tego, że nie może być jednocześnie ujemny i dodatni permutacja jest parzysta albo nieparzysta.

8. Niech  $A = [a_{i,j}] \in M_{n \times n}(K)$ . Wykaż, że

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)},$$

gdzie  $\operatorname{sgn}(\sigma) = 1$  lub  $-1$  gdy  $\sigma$  jest odpowiednio parzysta i nieparzysta.

Prosty dowód przez indukcję z definicji wyznacznika macierzy.

9. (\*) Niech  $A = [a_{i,j}] \in M_{n \times n}(K)$  będzie taka, że dla każdego  $m = 1, \dots, n$  oraz  $1 \leq j_1 < \dots < j_m \leq n$ , wyznacznik macierzy  $[a_{j_k, j_l}]_{k,l=1, \dots, m}$  wynosi zero. Udowodnij, że  $A^n = 0$ .

Wskazówka: udowodnij, że istnieje permutacja  $\sigma \in S_n$  taka, że macierz  $[a_{\sigma(i), \sigma(j)}]_{i,j=1, \dots, n}$  ma wszystkie swoje niezerowe wyrazy powyżej przekątnej.

Zadanie pochodzi IMC 2001. Zauważ, że w jasny sposób teza ze wskazówki implikuje tezę z zadania. Udowodnijmy więc wskazówkę.

Rozważmy graf  $G$  o wierzchołkach ponumerowanych  $1, \dots, n$  oraz krawędzią z  $i$  do  $j$  o ile  $a_{ij} \neq 0$ . Dowiedzimy, że w grafie tym nie ma cykli.

Założmy przeciwnie, że jakiś cykl istnieje oraz, że minimalna długość cyklu wynosi  $m$ . Niech  $j_1 < \dots < j_m$  będą wierzchołkami tego cyklu. Niech  $\sigma_0 \in S_m$  będzie permutacją taką, że  $a_{j_k, j_{\sigma_0(k)}} \neq 0$  dla każdego  $k = 1, \dots, m$ . Zauważ, że istnieje tylko jedna taka permutacja (jest nią permutacja zgodna z krawędziami badanego cyklu). Rzeczywiście, dla każdej innej permutacji  $\sigma \in S_m$  mamy dla pewnego  $k$ ,  $a_{j_k, j_{\sigma_0(k)}} = 0$ , bowiem w przeciwnym przypadku mamy krawędź, która łączy niesąsiednie wierzchołki cyklu, a więc można znaleźć cykl krótszy, wbrew założeniu, że ten rozważany jest minimalnej długości.

Ale mamy

$$0 = \det[a_{j_k, j_l}]_{k,l=1, \dots, m} = \sum_{\sigma \in S_m} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \prod_{i=1}^m a_{j_i, j_{\sigma(i)}} = \operatorname{sgn}(\sigma_0) \cdot \prod_{i=1}^m a_{j_i, j_{\sigma_0(i)}} + \sum_{\sigma \neq \sigma_0} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \prod_{i=1}^m a_{j_i, j_{\sigma(i)}} = \pm 1 + 0,$$

co stanowi sprzeczność.