

Geometria z algebrą liniową I, 2019/2020

ćwiczenia 24. – rozwiązania pracy domowej 7

9 lub 10 stycznia 2020

1. Niech $\mathcal{A} = \{(-2, 1), (-1, 1)\}$, $\mathcal{B} = \{(3, 2), (2, -2)\}$, $\mathcal{C} = \{(1, 0, 1, 0), (0, 0, -1, 0), (0, 2, 0, 1), (0, 1, 0, 1)\}$ oraz niech $\phi, \varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ i $\psi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ będą zadane tak, iż:

- $\psi((x, y)) = (x + y, -x, -3y, -x + 2y)$,
- $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{st} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$,
- $M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$,

Oblicz:

- a) $M(\text{id})_{st}^{\mathcal{C}}$,

Widać, że:

- $(1, 0, 0, 0) = 1(1, 0, 1, 0) + 1(0, 0, -1, 0) + 0(0, 2, 0, 1) + 0(0, 1, 0, 1)$,
- $(0, 1, 0, 0) = 0(1, 0, 1, 0) + 0(0, 0, -1, 0) + 1(0, 2, 0, 1) - 1(0, 1, 0, 1)$,
- $(0, 0, 1, 0) = 0(1, 0, 1, 0) - 1(0, 0, -1, 0) + 0(0, 2, 0, 1) + 0(0, 1, 0, 1)$,
- $(0, 0, 0, 1) = 0(1, 0, 1, 0) + 0(0, 0, -1, 0) - 1(0, 2, 0, 1) + 2(0, 1, 0, 1)$.

A zatem:

$$M(\text{id})_{st}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

- b) $M(\psi)_{st}^{st}$,

Wypisujemy posługując się wzorem: $M(\psi)_{st}^{st} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$

- c) $M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{st}$,

Mamy: $M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{st} = M(\text{id})_{\mathcal{B}}^{st} \cdot M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 6 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}.$

2. Dla przekształceń i baz z poprzedniego zadania, oblicz:

- a) $M(\psi \circ (\varphi + 3\phi))_{\mathcal{A}}^{\mathcal{C}}$,

Liczymy:

$$\begin{aligned} M(\psi \circ (\varphi + 3\phi))_{\mathcal{A}}^{\mathcal{C}} &= M(\psi)_{st}^{st} \cdot M(\varphi + 3\phi)_{\mathcal{A}}^{st} = M(\text{id})_{st}^{\mathcal{C}} \cdot M(\psi)_{st}^{st} \cdot (M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{st} + 3M(\phi)_{\mathcal{A}}^{st}) = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} -7 & 6 \\ 2 & -6 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \right) = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \\ 0 & -2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -4 & 9 \\ 8 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 28 & -15 \\ -16 & 12 \\ 36 & -33 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

- b) współrzędne wektora $\psi(\varphi(v) + 3\phi(v))$ w bazie $\mathcal{C}$, jeśli wektor v ma w bazie $\mathcal{A}$ współrzędne $1, 1$.
Szukane współrzędne, to

$$M(\psi \circ (\varphi + 3\phi))_{\mathcal{A}}^{\mathcal{C}} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 13 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix},$$

a zatem $7, 13, -4, 3$.

3. Niech będą dane baza $\mathcal{A} = \{(1, 2, 4), (1, 1, 1), (0, 0, 1)\}$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$, oraz przekształcenia $\psi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ i $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ zadane wzorami $\psi(y_1, y_2) = y_1 + 2y_2$ oraz $\varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + x_3, 2x_1 + x_2 - x_3)$. Znajdź współrzędne funkcjonału $\varphi^*(\psi)$ w bazie sprzężonej do bazy $\mathcal{A}$.

Znajdźmy bazę sprzężoną do $\mathcal{A}$. Mamy

$$\begin{aligned} \varphi_1((1, 0, 0)) &= \varphi_1(-(1, 2, 4) + 2(1, 1, 1) + 2(0, 0, 1)) = -1, \\ \varphi_2((1, 0, 0)) &= \varphi_2(-(1, 2, 4) + 2(1, 1, 1) + 2(0, 0, 1)) = 2, \\ \varphi_3((0, 0, 1)) &= \varphi_3(-(1, 2, 4) + 2(1, 1, 1) + 2(0, 0, 1)) = 2, \\ \varphi_1((0, 1, 0)) &= \varphi_1((1, 2, 4) - (1, 1, 1) - 3(0, 0, 1)) = 1, \\ \varphi_2((0, 1, 0)) &= \varphi_2((1, 2, 4) - (1, 1, 1) - 3(0, 0, 1)) = -1, \\ \varphi_3((0, 1, 0)) &= \varphi_3((1, 2, 4) - (1, 1, 1) - 3(0, 0, 1)) = -3, \\ \varphi_1((0, 0, 1)) &= 0, \\ \varphi_2((0, 0, 1)) &= 0, \\ \varphi_3((0, 0, 1)) &= 1, \end{aligned}$$

a zatem $\mathcal{A}^* = \{-x_1 + x_2, 2x_1 - x_2, 2x_1 - 3x_2 + x_3\}$.

Tymczasem $\varphi^*(\psi)(x_1, x_2, x_3) = \psi(\varphi(x_1, x_2, x_3)) = \psi(x_1 - x_2 + x_3, 2x_1 + x_2 - x_3) = x_1 - x_2 + x_3 + 2(2x_1 + x_2 - x_3) = 5x_1 + x_2 - x_3 = 3(-x_1 + x_2) + 5(2x_1 - x_2) - (2x_1 - 3x_2 + x_3)$, a zatem szukane współrzędne to $3, 5, -1$.

4. Niech V będzie przestrzenią liniową wymiaru 3 oraz $\varphi_1, \varphi_2 \in V^*$. Czy zawsze istnieje wektor $\alpha \in V \setminus \{0\}$ taki, że $\varphi_1(\alpha) = \varphi_2(\alpha)$? Odpowiedź uzasadnij!

Tak. Zauważmy, że $\dim \ker \varphi_1 \geq 2$ oraz $\dim \ker \varphi_2 \geq 2$, a zatem $\dim(\ker \varphi_1 \cap \ker \varphi_2) = \dim \ker \varphi_1 + \dim \ker \varphi_2 - \dim(\ker \varphi_1 + \ker \varphi_2) \geq 2 + 2 - 3 = 1$, a zatem istnieje wektor niezerowy $\alpha \in \ker \varphi_1 \cap \ker \varphi_2$, czyli $\varphi_1(\alpha) = 0 = \varphi_2(\alpha)$.

5. Oblicz wyznacznik macierzy $n \times n$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & \dots & 0 \\ & \dots & & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 3 \end{bmatrix}.$$

Po wykonaniu w kolejnych $n - 1$ krokach operacji $w_2 - w_1, w_3 - w_2, \dots, w_n - w_{n-1}$, mamy

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \dots & 0 \\ & \dots & & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Zatem wyznacznik tej macierzy to 1.