

Geometria z algebrą liniową I, 2019/2020

ćwiczenia 22. – rozwiązania

19 lub 20 grudnia 2019

Zadania

1. Niech $\dim V = n$ oraz niech $f_1, \dots, f_n \in V^*$. Wykazać, że $f_1, \dots, f_n$ są liniowo niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy $\bigcap_{i=1}^n \ker f_i = \{0\}$.

$\bigcap_{i=1}^n \ker f_i$ jest opisane przez układ równań, którego i -ty wiersz to $f_i(x_1, \dots, x_n) = 0$. Układ ten ma dokładnie jedno rozwiązanie (0) wtedy i tylko wtedy, gdy poszczególne równania, a więc funkcjonały, są liniowo niezależne.

2. Wykazać, że dwa funkcjonały mają takie same jądra wtedy i tylko wtedy, gdy są proporcjonalne.

To oznacza, że zbiór rozwiązań układu równań złożonego z dwóch równań odpowiadającym tym funkcjonom jest taki sam, jak zbiór rozwiązań jednego z tych równań. Czyli dwa równania są liniowo zależne, a zatem jedno jest proporcjonalne do drugiego.

3. (·) Znaleźć jądro i obraz przekształcenia sprzężonego Φ^* , jeśli

a) $\Phi: \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^4$ jest dane wzorem $\Phi(x, y, z) = (x + 2y, x + 3y + 2z, y + 2z, x + 2y - z)$,

Pytamy więc jakie przekształcenia $f: \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}$ mają tę własność, że $f(x + 2y, x + 3y + 2z, y + 2z, x + 2y - z) = (0, 0, 0, 0)$ dla każdych x, y, z . Jeśli $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4$, to

$$a + b + d = 0, 2a + 3b + c + 2d = 0, 2b + 2c - d = 0$$

Zatem

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{w_2 - 2w_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{w_1 - w_2, w_3 - 2w_2} \\ & \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{w_3 \cdot (-1)} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{w_1 - w_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \end{aligned}$$

A zatem $\ker \Phi^* = \text{lin}(x_1 - x_2 + x_3)$. Tymczasem $\text{im} \Phi^* = \text{lin}(x + 2y, x + 3y + 2z, y + 2z, x + 2y - z) = \text{lin}(x + 2y, y + 2z, -z)$. Te dwa ostatnie wektory to baza $\text{im} \Phi^*$.

- b) $\Phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ jest dane wzorem $\Phi(x, y) = (x + 2y, 3x + 6y, 2x + 4y)$.

Aby znaleźć jądro Φ^* rozwiązujemy układ równań:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 0 \end{array} \right]$$

co daje rozwiązanie $\ker \Phi^* = \text{lin}(-3x_1 + x_2, -2x_1 + x_3)$. Te wektory stanowią bazę jądra. Natomiast $\text{im} \Phi^* = \text{lin}((x + 2y, 3x + 6y, 2x + 4y) = \text{lin}(x + 2y)$, czyli baza to $\{x + 2y\}$.

4. Podać taki przykład bazy $\mathbb{R}^3$: v_1, v_2, v_3 , że $\varepsilon_1^* = 2v_1^* + v_3^*, \varepsilon_2^* = v_1^* + v_2^*$.

Niech zatem $v_1^* = -z, v_2^* = y + z$ oraz $v_3^* = x + 2z$. Zatem $v_1 = (2, 1, -1), v_2 = (0, 1, 0), v_3 = (1, 0, 0)$.

5. Opisać wszystkie funkcjonały $\Phi \in (M_{n \times n}(\mathbb{R}))^*$ takie, że dla dowolnych $A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$, $\Phi(AB) = \Phi(BA)$.

Niech $\Phi([x_{ij}]) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_{ij}$. Zauważmy, że jeśli $i \neq j$ oraz A jest macierzą samych zer poza 1 w pierwszym wyrazie i tego wiersza, zaś B jest macierzą samych zer poza 1 w pierwszym wyrazie j -tej kolumny, to AB da macierz samych zer poza 1 w i -tym wierszu i j -tej kolumnie, zaś BA to macierz zerowa. Zatem $a_{ij} = 0$, dla $i \neq j$. Te same macierze dla $i = j$ dają macierz BA z jedynką w lewym górnym rogu, a więc $a_{11} = a_{22} = \dots = a_{nn}$. Zatem $\Phi([x_{ij}]) = a \sum_{i=1}^n x_{ii}$. Zauważmy, że każdy taki funkcjonał spełnia warunki zadania, bowiem suma wyrazów na przekątnej AB i BA jest taka sama dla dowolnych macierzy A i B .

6. $(\cdot)$ Niech $f \in (\mathbb{R}^3)^*$ będzie taki, że $f = 5\varepsilon_1^* - 2\varepsilon_2^* + 3\varepsilon_3^*$.

a) Znaleźć wzór na f ,

b) Znaleźć współrzędne f w bazie sprzężonej do bazy $((2, 1, 1), (1, 2, 3), (0, 1, 1))$.

Zatem $f(x, y, z) = 5x - 2y + 3z$.

Mamy $f((2, 1, 1)) = 11$, $f((1, 2, 3)) = 10$ oraz $f((0, 1, 1)) = 1$, a zatem współrzędne te to 11, 10, 1.

7. Niech

a) $V = \text{lin}((1, 2, 0, -3), (-2, 3, 2, -3), (-3, 1, 2, 0)) \subseteq \mathbb{R}^4$,

b) $V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x = y = z = t\}$.

Opisać równaniami anihilator V , czyli $\text{Anh}(V) = \{\varphi \in (\mathbb{R}^4)^* : V \subseteq \ker(\varphi)\}$. Podać jego bazę.

a) A zatem $ax + by + cz + dt \in \text{Anh}(V)$ wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\begin{cases} a + 2b - 3d = 0 \\ -2a + 3b + 2c - 3d = 0 \\ -3a + b + 2c = 0 \end{cases}$$

Aby znaleźć bazę, musimy rozwiązać ten układ równań.

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -3 & 0 \\ -2 & 3 & 2 & -3 & 0 \\ -3 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{array} \right] & \xrightarrow{w_2 + 2w_1, w_3 + 3w_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 7 & 2 & -9 & 0 \\ 0 & 7 & 2 & -9 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{w_3 - w_2} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 7 & 2 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] & \xrightarrow{w_2 \cdot 1/7} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2/7 & -9/7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{w_1 - 2w_2} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -4/7 & -3/7 & 0 \\ 0 & 1 & 2/7 & -9/7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Zatem $2/7x - 2/7y + z, 12/7x + 9/7y + t$ jest bazą $\text{Anh}(V)$.

- b) Zatem baza V to $(1, 1, 1, 1)$, a więc $ax + by + cz + dt \in \text{Anh}(V)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a + b + c + d = 0$. Czyli $\text{Anh}(V)$ jest rozpięty przez $-x + y, -x + z, -x + t$.

8. $(\star)$ Niech $A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ będą takie, że $AB + A + B = 0$. Udowodnij, że $AB = BA$.

Zadanie pochodzi z IMC 2003. Zauważamy, że $(A + I)(B + I) = AB + A + B + I = 0 + I = I$. W takim razie także $(B + I)(A + I) = I$ (jeśli zastanawiasz się dlaczego, to pomyśl o macierzy $A + I$ jako o macierzy zmiany bazy z $\mathcal{A}$ na $\mathcal{B}$ – wtedy $B + I$ to musi być macierz zmiany bazy z $\mathcal{B}$ na $\mathcal{A}$). W takim razie $BA + A + B + I = AB + A + B + I$, czyli $AB = BA$.