

Geometria z algebrą liniową I, 2019/2020

ćwiczenia 21.

13 lub 17 grudnia 2019

Zadania

1. $(\cdot)$ Znaleźć współrzędne formy $x_1 + x_2 + x_3$ w bazie sprzężonej do bazy $(\varepsilon_1 + \varepsilon_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2 + \varepsilon_3)$ przestrzeni K^3 , gdzie K jest dowolnym ciałem.
2. $(\star)$ Niech V będzie nieskończenie wymiarową przestrzenią liniową. Udowodnić, że V oraz V^* nie są izomorficzne.
3. Niech $I = [a, b]$, $a < b$. Dla każdego $c \in I$ niech $\varphi_c: C(I) \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcjonałem określonym jako $\varphi_c(f) = f(c)$. Udowodnić, że układ $(\varphi_c)_{c \in I}$ jest liniowo niezależny w przestrzeni $C(I)^*$.
4. Przy powyższych założeniach, udowodnić, że funkcjonał

$$\varphi(f) = \int_I f$$

nie należy do podprzestrzeni $\text{lin}((\varphi_c)_{c \in I})$.

5. Niech V i W będą przestrzeniami liniowymi. Niech $\Phi: L(V, W) \rightarrow L(W^*, V^*)$ będzie przekształceniem danym jako $\Phi(\varphi) = \varphi^*$. Udowodnić, że gdy $\dim V < \infty$ oraz $\dim W < \infty$, to Φ jest monomorfizmem, a zatem jest izomorfizmem.
6. Udowodnij, że przekształcenie $\Phi: L(V, V) \rightarrow L(V^*, V^*)$ zdefiniowane jak wyżej jest antyizomorfizmem, t.j. $\Phi(\alpha \circ \beta) = \Phi(\beta) \circ \Phi(\alpha)$, o ile V jest przestrzenią skończenie wymiarową.
7. $(\cdot\cdot)$ Niech $\varphi: K^3 \rightarrow K^2$ będzie dane jako $\varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2)$. Znaleźć $\varphi^*(2x_1 - x_2)$.